Over wiskunde en werkelijkheid

Hendrickx, Roger Louis Leon

Publication date:
1994

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

Over wiskunde en werkelijkheid.

Similariteit, binaire relaties
geïnduceerd door quasi-afstandsfuncties,
isomorfie op ϵ na en de implicaties daarvan
voor de relatie wiskunde-werkelijkheid.

Roger Louis Leon Hendrickx

Over wiskunde en werkelijkheid.

Similariteit, binaire relaties
geïnduceerd door quasi-afstandsfuncties,
isomorfie op ε na en de implicaties daarvan
voor de relatie wiskunde-werkelijkheid.

Proefschrift
ter verkrijging van de graad van doctor aan de
Katholieke Universiteit Brabant,
op gezag van de rector magnificus,
prof. dr. L.F.W. de Klerk, in het openbaar
te verdedigen ten overstaan van een door het
college van dekanen aangewezen commissie
in de aula van de Universiteit op
vrijdag 17 juni 1994 te 16.15 uur
door

Roger Louis Leon Hendrickx
geboren te Hofstade, België.

Promotoren : Prof. Dr. H. C. M. de Swart

Prof. Dr. W. Mielants

Opgedragen aan Jenny, Pascale en Tatjana.

Met dank aan iedereen die heeft bijgedragen aan de totstandkoming van dit proefschrift, in het bijzonder aan Prof. Dr. H. C. M. de Swart en Prof. Dr. W. Mielants voor de waardevolle suggesties en de hulp die ik van hen mocht ontvangen, aan Prof. Dr. A. C. M. van Rooij die in de beginfase een belangrijke steun is geweest, alsook aan Drs. Benoit J. Suykerbuyk voor de ongewone bereidwilligheid waarmede hij telkens nieuwe versies van het manuscript typte en uiteindelijk drukklaar maakte.

Inhoud

INLEIDING

Dit proefschrift is ontstaan uit de verwondering die ik reeds als kandidaatsstudent ervaarde over de merkwaardige relatie die er bestaat tussen de werkelijkheid enerzijds en de wiskunde die deze werkelijkheid beschrijft.

Dat deze relatie er is neem ik aan op grond van dagelijkse ervaring: De stand van een planeet kan met grote nauwkeurigheid voorspeld worden, de snelheid van een vallend voorwerp kan met de valwet berekend worden, het tijdstip van ebbe en vloed kan nauwkeurig voorspeld worden. Voorbeelden zijn er ten overvloedde.

Bij deze probleemstelling treden twee vragen naar voren waarvan de ene van filosofische aard is en de tweede thuishoort in de wiskunde.

De eerste vraag kan als volgt geformuleerd worden: Waarom kan men met behulp van de wiskunde zinvolle uitspraken, ja zelfs voorspellingen doen over de buitenwereld. De tweede vraag kan samengevat worden als volgt: aangenomen dat er een relatie tussen wiskunde en werkelijkheid bestaat, welke eigenschappen heeft deze relatie?

De eerste (filosofische) vraag is de aloude vraag naar het verband tussen ons denken en de werkelijkheid. Deze vraag brengt ons bij Plato.

Het komt ons voor dat Plato zijn ideeën opgevat heeft als metafysische realiteiten, in deze zin dat zij zouden bestaan in een hogere kosmos dan die waarin ons aardse leven zich afspeelt, dat zij onveranderlijk zijn, dat zij niet konden geschouwd worden door onze lichamelijke ogen, maar enkel door het hoogste deel van onze ziel, d.w.z. door de zuivere rede. Hij vatte de Ideeën dus niet op als gedachten, zelfs niet als gedachteninhouden, d.w.z. als mentale oerbeelden die alleen maar in onze geest als de immanente inhouden van ons intellectuele schouwen zouden bestaan, maar als extra-mentale werkelijkheden die zich tot dat intellektuele schouwen op dezelfde manier verhouden als de veranderlijke dingen van de wereld hier beneden tot het zintuiglijke schouwen van onze ogen.

De tweede vraag brengt ons bij Sokrates. In de *Parmenides* zegt Sokrates het volgende: "Die ideeën staan vast in de natuur als modellen, en de andere dingen gelijken er op en zijn er nabootsingen van, en het deelhebben van de dingen aan de ideeën bestaat in niets anders dan in het feit dat zij er afbeeldingen van zijn."*

Het is precies deze relatie 'goed lijken op' die verder centraal zal staan in mijn proefschrift.

Ik ben uitgegaan van een binaire relatie $\sim$ die reflexief is en symmetrisch.

Vervolgens wordt van deze similariteitsrelatie $\sim$ een andere binaire relatie afgeleid die we $\sim'$ noemen; deze is in het algemeen eveneens reflexief en transitief.

*Plato, Parmenides, 132d.

Het invoeren van $\sim'$ laat ons toe objecten uit de buitenwereld van elkaar te onderscheiden die met betrekking tot $\sim$ niet te onderscheiden zijn.

1 De wiskunde als middel om de buitenwereld te beschrijven

Met de uitzondering van de wiskundigen, die de wiskunde als doel en niet als middel beschouwen, maken de meeste wetenschappers gebruik van de wiskunde omdat zij de mening zijn toegedaan dat met behulp van wiskundige modellen de buitenwereld of althans een deel daarvan op genoegzame wijze kan beschreven en bestudeerd worden.

Ik zal in hetgeen volgt proberen aan te tonen dat wanneer men met behulp van een wiskundig model, een deel van de buitenwereld beschrijft men in feite het volgende doet :

- Men observeert een deel van de buitenwereld, die men wil bestuderen. Daarbij manifesteren zich een reeks bewustzijnsinhouden. De observatie kan gebeuren via een komplex instrumentarium, waarbij waarnemingsgegevens automatisch geregistreerd en verwerkt worden. De uiteindelijke interpretatie gebeurt steeds door de mens en wel via een reeks bewustzijnsinhouden die zich via de waarneming in ons bewustzijn manifesteren.

- Daarna bedenken wij een wiskundig model dat zó geconcipieerd is dat tijdens de mentale konstruktie van dat model zich in ons bewustzijn bewustzijnsinhouden manifesteren die erg goed lijken op de bewustzijnsinhouden die geïnduceerd worden tijdens de observatie van het deel van de buitenwereld dat wij bestuderen.

Nemen we als voorbeeld een cirkel met middelpunt o. We gaan na wat het verband is tussen deze figuur en de formule $y^2 + x^2 = R^2$.

Wat is er nu specifiek aan deze figuur? Welnu, het essentiële van de cirkel is het feit dat er een punt o aan te wijzen is, zodanig dat alle punten van de cirkelomtrek op afstand R verwijderd liggen van het punt o. De formule $x^2 + y^2 = R^2$ levert ons een deelverzameling V op van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nl.

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = R^2\}.$$

Denken we daarbij onze cirkel geplaatst in een rechthoekig coördinatenstelsel waarvan de oorsprong samenvalt met het punt o, dan drukt de formule $x^2 + y^2 = R^2$ juist de essentie uit van onze cirkel. Een cirkel die wij tekenen is echter geen volmaakte cirkel en hetzelfde geldt voor iedere cirkelvormige figuur die we in de buitenwereld aantreffen.

We doen in feite het volgende:

- Wij observeren een deel van de buitenwereld.

- De menselijke geest vormt een vereenvoudigd beeld van die buitenwereld.

  Die vereenvoudiging vindt haar oorsprong in de beperktheid van onze zintuigen.

- Dit vereenvoudigd beeld, eens dat het op bovengeschetste wijze in onze geest is ontstaan, wordt nu verder als "referentie" gebruikt om te beslissen wat we in de buitenwereld al dan niet als cirkel mogen beschouwen [7, p. 87].

Tussen deze referentie, nl. $x^2 + y^2 = R^2$ en de cirkel uit de buitenwereld bestaat nu een relatie, nl. die van similariteit.

De reële verschillen tussen onze cirkel uit de buitenwereld en de meetkundige plaats uitgedrukt door

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = R^2\}$$

spelen bij de beschrijving van de buitenwereld in een aanzienlijk aantal gevallen geen beduidenswaardige rol.

Aan deze vereenvoudigde begrippen gaan we nu een autonoom bestaansrecht toekennen: het komt ons voor dat zij ergens buiten ons denken in de wereld der ideeën van Plato moeten thuishoren, daar waar zij in feite via observatie van de buitenwereld en vereenvoudiging door onze zintuigen door ons denken zijn gevormd.

We gaan daarbij uit van volgende vóóronderstellingen:

1. De buitenwereld W bestaat en is onafhankelijk van mijn bewustzijn.

2. De veranderingen in de buitenwereld vinden niet willekeurig plaats, ze zijn onderworpen aan de wetten die gelden in de buitenwereld.

3. Een bewustzijnsinhoud is datgene dat zich aan mij manifesteert wanneer ik een deel van de buitenwereld observeer. Alle bewustzijnsinhouden verwijzen op een of andere wijze naar de buitenwereld.

4. De verzameling van al mijn bewustzijnsinhouden, ook de bewustzijnsinhouden die zich in het verleden aan mij hebben voorgedaan, noem ik mijn bewustzijn. Deze verzameling noemen we B.

5. De veranderingen in het bewustzijn zijn eveneens onderworpen aan wetten.

Wat is het verband tussen de elementen uit W (de buitenwereld) en de elementen uit B (bewustzijnsinhouden)? Een menselijke waarnemer observeert een element $w \in W$, daarbij vormt zich een bewustzijnsinhoud $b \in B$. Hoe deze bewustzijnsinhoud tot stand komt laten we in het midden. Wel zullen we onderzoeken welke rol daarbij de menselijke geest g speelt. We beschouwen de menselijke geest als een functie g, die W afbeeldt naar B.

Van deze afbeelding $g : W \to B$ gaan we een aantal eigenschappen onderzoeken.

2 De afbeeldingscontext

Wanneer we de afbeelding $g : W \to B$ bestuderen dienen we dit steeds te doen binnen een bepaalde context c. Inderdaad treffen we in W een aantal elementen aan die binnen een bepaalde context als 'gelijk' beschouwd worden. Nemen we als context c: 'Visueel niet te onderscheiden van'. Nemen we een roos en het hologram van die roos. Visueel zijn beide beelden niet te onderscheiden maar toch zijn het objecten uit W die fundamenteel verschillend zijn. Ons bewustzijn ervaart dus hetzelfde beeld dat afkomstig is van twee totaal verschillende dingen uit de buitenwereld. Daaruit mag reeds blijken dat onze afbeelding $g : W \rightarrow B$ niet één-eenduidig is. Er kan in sommige gevallen zelfs een hele verzameling van objecten bestaan in W, die binnen een bepaalde context c, in het bewustzijn als gelijk ervaren worden.

Voor $r \in W$ zij $U_r = \{x \in W \mid g(x) =_c g(r)\}$.

In ons voorbeeld is U_r dus de verzameling van alle $x \in W$ die visueel niet te onderscheiden zijn van onze roos r. In de formule $g(x) =_c g(r)$ gebruiken we de index c om aan te duiden dat deze gelijkheid context gebonden is. c dient hier bijvoorbeeld gelezen te worden als 'is visueel niet te onderscheiden van'.

Nemen we nu in de plaats van onze roos r het huis h aan de overkant van de straat, dan krijgen we een andere $U_h \neq U_r$, namelijk

$$U_h = \{x \in W \mid g(x) =_c g(h)\}.$$

Op deze wijze wordt W opgedeeld in deelverzamelingen. Deze klasse van deelverzamelingen noemen we Ω. Wat is nu de functie van de menselijke geest in de totstandkoming van onze bewustzijnsinhouden?

Welnu, in plaats van aan een object in W, een bewustzijnsinhoud uit B toe te voegen, voegt g (de menselijke geest), binnen een bepaalde context c, aan een element uit Ω een object uit B toe.

De index c staat hier voor de intentionaliteit van de onderzoeker.

$g : W \to B$ induceert dus een functie $g'_c : \Omega_c \to B$.†

We krijgen dus een afbeelding $g'_c : \Omega_c \to B$. Kiezen we een andere context c, dan zal ook onze verzameling Ω_c verschillen. We kunnen dus stellen:

$$\forall_c \exists \Omega_c \, [g'_c : \Omega_c \to B].$$

Deze formule dient aldus gelezen te worden: bij iedere context c hoort er een klasse Ω_c, bestaande uit deelverzamelingen van W, zó dat g'_c Ω_c afbeeldt naar B.

Gegeven een eindige verzameling V. Op $V \times V$ onderstellen we een quasi-afstandsfunctie $d : V \times V \to [0, \infty)$ met de volgende eigenschappen:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(x,y) &= d(y,x) \quad \text{voor alle } (x,y) \in V \times V. \end{aligned}$$

Vb.: de Euclidische afstandsfunctie op $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

---

† $U_\vartheta = \{x \in W \mid g(x) =_c g(\vartheta)\}$

$\Omega_c = \{U_\vartheta \mid \vartheta \in W\}$

g induceert een afbeelding $g'_c : \Omega_c \to B$, gedefinieerd door $g'_c(U_\vartheta) = g(\vartheta)$.

Stel $U_\vartheta = U_{\vartheta'}$, d.w.z. $g(\vartheta) =_c g(\vartheta')$. Dus g'_c is goed gedefinieerd.

Stel ϵ is de nauwkeurigheid waarmede we de buitenwereld kunnen observeren. Met andere woorden, ϵ is de kleinste 'afstand' tussen twee elementen uit V die we kunnen vaststellen.

We beschouwen de volgende deelverzamelingen van $V \times V$:

$$V_\epsilon = \Big\{(x, y) \in V \times V \mid d(x, y) \geq \epsilon\Big\} \text{ en } V \times V \backslash V_\epsilon.$$

Voor $(x, y) \in V \times V \backslash V_\epsilon$ geldt dat $d(x, y) < \epsilon$, m.a.w. x is niet te onderscheiden van y.

Voor $(x, y) \in V \times V$ definiëren we $x \sim y$ als $d(x, y) < \epsilon$

en voor $(x, y) \in V \times V$ schrijven we $x \not\sim y$ als $d(x, y) \geq \epsilon$.

Op deze wijze bekomen we een binaire relatie die reflexief is en symmetrisch.

Zulk een structuur $(V, \sim)$ is een graaf. De knopen zijn de elementen van V en de bogen zijn de paren van knopen (x, y) zó dat $x \sim y$.

Hoofdstuk 1

Binaire relaties geïnduceerd door quasi-afstandsfuncties

We gaan uit van een *willekeurige* binaire relatie $\sim$ op V.

Definitie 1 : $\triangle_0(x) = \{y \in V \mid y \sim x\}$.

Definitie 2 : $x \sim^1 y \Leftrightarrow \wedge_{c \in V}[c \sim y \to c \sim x]$. *Dit is gelijkwaardig met* $\triangle_0(y) \subseteq \triangle_0(x)$.

Definitie 3 : $\triangle_1(x) = \{y \in V \mid y \sim^1 x\}$.

Algemeen :

$$\boxed{\begin{array}{l} \sim^0 \, = \, \sim \\ x \sim^n y \Longleftrightarrow \wedge_{c \in V}\Big[c \sim^{n-1} y \to c \sim^{n-1} x\Big] \\ \triangle_n(x) = \{y \in V \mid y \sim^n x\} \end{array}}$$

Stelling 1 : *Voor $n \geq 1$ is $\sim^n$ reflexief.*

Bewijs : $x \sim^n x \Longleftrightarrow \wedge_{c \in V}\Big[c \sim^{n-1} x \to c \sim^{n-1} x\Big]$. Dit is gelijkwaardig met $\triangle_{n-1}(x) \subseteq \triangle_{n-1}(x)$. □

Stelling 2 : *Voor $n \geq 1$ is $\sim^n$ transitief.*

Bewijs : $x \sim^n y \Longleftrightarrow \triangle_{n-1}(y) \subseteq \triangle_{n-1}(x)$.

$y \sim^n z \Longleftrightarrow \Delta_{n-1}(z) \subseteq \Delta_{n-1}(y)$. Stel nu dat $x \sim^n y$ en $y \sim^n z$.

Dan $\Delta_{n-1}(z) \subseteq \Delta_{n-1}(x)$, ofwel $x \sim^n z$. $\square$

Uit Stelling 1 en 2 volgt:

Stelling 3: *Voor $n \geq 1$ is $\sim^n$ een quasi-orderelatie.*

Stelling 4: *Voor reflexieve $\sim$ geldt: $x \sim^1 y \Longrightarrow y \sim x$.*

Bewijs: Stel $x \sim^1 y$. Dan: $\wedge_{c \in V}[c \sim y \rightarrow c \sim x]$. Neem $c = y$, dan volgt: $y \sim y \rightarrow y \sim x$.

Wegens de reflexiviteit geldt $y \sim y$ en derhalve $y \sim x$. $\square$

Stelling 4 kan als volgt gegeneraliseerd worden:

Stelling 5: *Voor reflexieve $\sim^{n-1}$, $n \geq 2$ geldt: $x \sim^n y \Longrightarrow y \sim^{n-1} x$.*

Bewijs: Stel $x \sim^n y$. Dan: $\wedge_{c \in V}[c \sim^{n-1} y \rightarrow c \sim^{n-1} x]$.

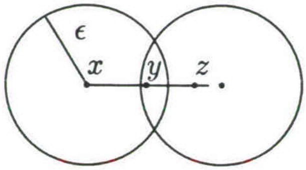
Neem $c = y$, dan volgt: $y \sim^{n-1} y \rightarrow y \sim^{n-1} x$.

Wegens de reflexiviteit van $\sim^{n-1}$, volgt $y \sim^{n-1} x$. $\square$

Definitie 4: *$\sim_\epsilon$ noemen we afkomstig van de quasi-afstandsfunctie d als $x \sim_\epsilon y := d(x, y) < \epsilon$.*

Stelling 6: *Als $V = \mathbb{R}$ en $\sim_\epsilon$ is afkomstig van de Euclidische quasi-afstandsfunctie $d : V \times V \rightarrow [0, \infty)$, dan geldt: $x \sim_\epsilon^1 y \Longleftrightarrow x = y$.*

Bewijs: (1) $x = y \Longrightarrow x \sim_\epsilon^1 y$. Triviaal want als $x = y$ dan volgt: $x \sim_\epsilon^1 y \Longleftrightarrow \wedge_{c \in V}[c \sim_\epsilon x \rightarrow c \sim_\epsilon x]$.



(2) $x \sim^1_\epsilon y \Longrightarrow x = y$.

$x \sim^1_\epsilon y \Longleftrightarrow \bigwedge_{c \in V}[c \sim_\epsilon y \to c \sim_\epsilon x]$.

Stel $x \neq y$.

Neem een punt z op de lijn xy, zó dat $d(z,y) = \epsilon - \frac{1}{2}d(x,y) < \epsilon$.

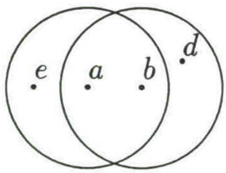
Dan is:

$$\begin{aligned} d(z,x) &= d(z,y) + d(x,y) \\ d(z,x) &= \epsilon - \frac{1}{2}d(x,y) + d(x,y) \\ d(z,x) &= \epsilon + \frac{1}{2}d(x,y) > \epsilon \end{aligned}$$

Dus: $z \sim_\epsilon y$, $z \not\sim_\epsilon x$; dus $x \not\sim^1_\epsilon y$.

We weten: $x \neq y \Longrightarrow x \not\sim^1_\epsilon y$. Contrapositie: $x \sim^1_\epsilon y \Longrightarrow x = y$. $\square$

Voorbeeld 1:



$$V = \{a, b, d, e\},$$

$\triangle_0(a) = \{a, b, e\}$, $\triangle_0(b) = \{a, b, d\}$,

$\triangle_0(d) = \{b, d\}$, $\triangle_0(e) = \{a, e\}$.

Matrix 1: $\sim$ *

	a	b	d	e
a	$\sim$	$\sim$	$\not\sim$	$\sim$
b	$\sim$	$\sim$	$\sim$	$\not\sim$
d	$\not\sim$	$\sim$	$\sim$	$\not\sim$
e	$\sim$	$\not\sim$	$\not\sim$	$\sim$

We onderzoeken de relatie $\sim^1$:

$$x \sim^1 y \iff \wedge_c \; [c \sim y \to c \sim x]$$

$$a \sim^1 a \iff \wedge_c \; [c \sim a \to c \sim a] \qquad \text{dus } a \sim^1 a$$

$$a \sim^1 b \iff \wedge_c \; [c \sim b \to c \sim a]$$

$$a \sim b \to a \sim a$$

$$b \sim b \to b \sim a$$

$$\boxed{d \overset{1}{\sim} b \to d \overset{0}{\sim} a} \qquad \text{dus } a \not\sim^1 b^\dagger$$

$$e \sim b \to e \sim a$$

$$a \sim^1 e \iff \wedge_c \; [c \sim e \to c \sim a]$$

$$a \sim e \to a \sim a$$

$$b \sim e \to b \sim a$$

$$d \sim e \to d \sim a$$

$$e \sim e \to e \sim a \qquad \text{dus } a \sim^1 e$$

* $\sim$ in de i^{de} rij en j^{de} kolom betekent: $a_i \sim b_j$.

† We omkaderen de $A \to B$ relaties die onwaar zijn.

$$b \sim^1 a \iff \wedge_c \; [c \sim a \to c \sim b]$$

$$a \sim a \to a \sim b$$

$$b \sim a \to b \sim b$$

$$d \sim a \to d \sim b$$

$$\boxed{e \overset{1}{\sim} a \to e \overset{0}{\sim} b} \quad \text{dus } b \not\sim^1 a$$

$$b \sim^1 b \iff \wedge_c \; [c \sim b \to c \sim b] \quad \text{dus } b \sim^1 b$$

$$b \sim^1 d \iff \wedge_c \; [c \sim d \to c \sim b]$$

$$a \sim d \to a \sim b$$

$$b \sim d \to b \sim b$$

$$d \sim d \to d \sim b$$

$$e \sim d \to e \sim b \quad \text{dus } b \sim^1 d$$

$$d \sim^1 b \iff \wedge_c \; [c \sim b \to c \sim d]$$

$$\boxed{a \overset{1}{\sim} b \to a \overset{0}{\sim} d} \quad \text{dus } d \not\sim^1 b$$

$$b \sim b \to b \sim d$$

$$d \sim b \to d \sim d$$

$$e \sim b \to e \sim d$$

$$d \sim^1 d \iff \wedge_c \; [c \sim d \to c \sim d] \quad \text{dus } d \sim^1 d$$

$$e \sim^1 a \iff \wedge_c \; [c \sim a \to c \sim e]$$

$$a \sim a \to a \sim e$$

$$\boxed{b \overset{1}{\sim} a \to b \overset{0}{\sim} e} \quad \text{dus } e \not\sim^1 a$$

$$d \sim a \to d \sim e$$

$$e \sim a \to e \sim e$$

$$e \sim^1 e \iff \wedge_c \; [c \sim e \to c \sim e] \quad \text{dus } e \sim^1 e$$

Uit Stelling 4 volgt nu: $x \not\sim y \Longrightarrow y \not\sim^1 x$.

Uit matrix 1 volgt dan:

$a \not\sim d$	dus	$d \not\sim^1 a$	$d \not\sim e$	dus	$e \not\sim^1 d$
$b \not\sim e$	dus	$e \not\sim^1 b$	$e \not\sim b$	dus	$b \not\sim^1 e$
$d \not\sim a$	dus	$a \not\sim^1 d$	$e \not\sim d$	dus	$d \not\sim^1 e$

We verkrijgen het volgende resultaat:

Matrix 2: $\sim^1$

	a	b	d	e
a	$\sim^1$	$\not\sim^1$	$\not\sim^1$	$\sim^1$
b	$\not\sim^1$	$\sim^1$	$\sim^1$	$\not\sim^1$
d	$\not\sim^1$	$\not\sim^1$	$\sim^1$	$\not\sim^1$
e	$\not\sim^1$	$\not\sim^1$	$\not\sim^1$	$\sim^1$

We onderzoeken nu $\sim^2$.

$$x \sim^2 y \iff \wedge_c \; [c \sim^1 y \rightarrow c \sim^1 x]$$

$$a \sim^2 a \iff \wedge_c \; [c \sim^1 a \rightarrow c \sim^1 a] \quad \text{dus } a \sim^2 a$$

$$a \sim^2 e \iff \wedge_c \; [c \sim^1 e \rightarrow c \sim^1 a]$$

$$a \sim^1 e \rightarrow a \sim^1 a$$

$$b \sim^1 e \rightarrow b \sim^1 a$$

$$d \sim^1 e \rightarrow d \sim^1 a$$

$$\boxed{e \overset{1}{\sim^1} e \rightarrow e \overset{0}{\sim^1} a} \quad \text{dus } a \not\sim^2 e$$

$$b \sim^2 b \iff \wedge_c \quad [c \sim^1 b \to c \sim^1 b] \qquad \text{dus } b \sim^2 b$$

$$\begin{array}{lll} b \sim^2 d & \iff \wedge_c & [c \sim^1 d \to c \sim^1 b] \\ & & a \sim^1 d \to a \sim^1 b \\ & & b \sim^1 d \to b \sim^1 b \\ & & \boxed{d \overset{1}{\sim^1} d \to d \overset{0}{\sim^1} b} \qquad \text{dus } b \not\sim^2 d \\ & & e \sim^1 d \to e \sim^1 b \end{array}$$

$$d \sim^2 d \iff \wedge_c \quad [c \sim^1 d \to c \sim^1 d] \qquad \text{dus } d \sim^2 d$$

$$e \sim^1 e \iff \wedge_c \quad [c \sim^1 e \to c \sim^1 e] \qquad \text{dus } e \sim^2 e$$

Verder volgt uit Stelling 5: $x \not\sim^1 y \Longrightarrow y \not\sim^2 x$.

Uit matrix 2 volgt dan:

$$\begin{array}{llllllll} a \not\sim^1 b & \text{dus} & b \not\sim^2 a & ; & d \not\sim^1 b & \text{dus} & b \not\sim^2 d & , \\ a \not\sim^1 d & \text{dus} & d \not\sim^2 a & ; & d \not\sim^1 e & \text{dus} & e \not\sim^2 d & , \\ b \not\sim^1 a & \text{dus} & a \not\sim^2 b & ; & e \not\sim^1 a & \text{dus} & a \not\sim^2 e & , \\ b \not\sim^1 e & \text{dus} & e \not\sim^2 b & ; & e \not\sim^1 b & \text{dus} & b \not\sim^2 e & , \\ d \not\sim^1 a & \text{dus} & a \not\sim^2 d & ; & e \not\sim^1 d & \text{dus} & d \not\sim^2 e & . \end{array}$$

We verkrijgen het volgende resultaat:

Matrix 3: $\sim^2$

	a	b	d	e
a	$\sim^2$	$\not\sim^2$	$\not\sim^2$	$\not\sim^2$
b	$\not\sim^2$	$\sim^2$	$\not\sim^2$	$\not\sim^2$
d	$\not\sim^2$		$\sim^2$	$\not\sim^2$
e		$\not\sim^2$	$\not\sim^2$	$\sim^2$

Dienen nog onderzocht te worden:

$$d \sim^2 b \iff \wedge_c \ [c \sim^1 b \rightarrow c \sim^1 d]$$

$$a \sim^1 b \rightarrow a \sim^1 d$$

$$b \sim^1 b \rightarrow b \sim^1 d$$

$$d \sim^1 b \rightarrow d \sim^1 d$$

$$e \sim^1 b \rightarrow e \sim^1 d \qquad \text{dus } d \sim^2 b$$

$$e \sim^2 a \iff \wedge_c \ [c \sim^1 a \rightarrow c \sim^1 e]$$

$$a \sim^1 a \rightarrow a \sim^1 e$$

$$b \sim^1 a \rightarrow b \sim^1 e$$

$$d \sim^1 a \rightarrow d \sim^1 e$$

$$e \sim^1 a \rightarrow e \sim^1 e \qquad \text{dus } e \sim^2 a$$

Dit levert ons het volgende resultaat op:

Matrix 4: $\sim^2$

	a	b	d	e
a	$\sim^2$	$\not\sim^2$	$\not\sim^2$	$\not\sim^2$
b	$\not\sim^2$	$\sim^2$	$\not\sim^2$	$\not\sim^2$
d	$\not\sim^2$	$\sim^2$	$\sim^2$	$\not\sim^2$
e	$\sim^2$	$\not\sim^2$	$\not\sim^2$	$\sim^2$

We onderzoeken nu $\sim^3$.

$$
\begin{array}{llll}
x \sim^3 y & \Longleftrightarrow & \bigwedge_c \; [c \sim^2 y \rightarrow c \sim^2 x] & \\
a \sim^3 a & \Longleftrightarrow & \bigwedge_c \; [c \sim^2 a \rightarrow c \sim^2 a] & \text{dus } a \sim^3 a \\
b \sim^3 b & \Longleftrightarrow & \bigwedge_c \; [c \sim^2 b \rightarrow c \sim^2 b] & \text{dus } b \sim^3 b \\
d \sim^3 b & \Longleftrightarrow & \bigwedge_c \; [c \sim^2 b \rightarrow c \sim^2 d] & \\
 & & a \sim^2 b \rightarrow a \sim^2 d & \\
 & & \boxed{b \overset{1}{\sim^2} b \rightarrow b \overset{0}{\sim^2} d} & \text{dus } d \not\sim^3 b \\
 & & d \sim^2 b \rightarrow d \sim^2 d & \\
 & & e \sim^2 b \rightarrow e \sim^2 d & \\
d \sim^3 d & \Longleftrightarrow & \bigwedge_c \; [c \sim^2 d \rightarrow c \sim^2 d] & \text{dus } d \sim^3 d \\
e \sim^3 a & \Longleftrightarrow & \bigwedge_c \; [c \sim^2 a \rightarrow c \sim^2 e] & \\
 & & \boxed{a \overset{1}{\sim^2} a \rightarrow a \overset{0}{\sim^2} e} & \text{dus } e \not\sim^3 a \\
 & & b \sim^2 a \rightarrow b \sim^2 e & \\
 & & d \sim^2 a \rightarrow d \sim^2 e & \\
 & & e \sim^2 a \rightarrow e \sim^2 e & \\
e \sim^3 e & \Longleftrightarrow & \bigwedge_c \; [c \sim^2 e \rightarrow c \sim^2 e] & \text{dus } e \sim^3 e
\end{array}
$$

Uit Stelling 5 volgt $x \not\sim^2 y \Longrightarrow y \not\sim^3 x$. Uit matrix 4 volgt dan:

$$
\begin{array}{lll c lll l}
a \not\sim^2 b & \text{dus} & b \not\sim^3 a & ; & b \not\sim^2 e & \text{dus} & e \not\sim^3 b & , \\
a \not\sim^2 d & \text{dus} & d \not\sim^3 a & ; & d \not\sim^2 a & \text{dus} & a \not\sim^3 d & , \\
a \not\sim^2 e & \text{dus} & e \not\sim^3 a & ; & d \not\sim^2 e & \text{dus} & e \not\sim^3 d & , \\
b \not\sim^2 a & \text{dus} & a \not\sim^3 b & ; & e \not\sim^2 b & \text{dus} & b \not\sim^3 e & , \\
b \not\sim^2 d & \text{dus} & d \not\sim^3 b & ; & e \not\sim^2 d & \text{dus} & d \not\sim^3 e & .
\end{array}
$$

Dit levert ons voorlopig het volgende resultaat op:

Matrix 5: $\sim^3$

	a	b	d	e
a	$\sim^3$	$\not\sim^3$	$\not\sim^3$	
b	$\not\sim^3$	$\sim^3$		$\not\sim^3$
d	$\not\sim^3$	$\not\sim^3$	$\sim^3$	$\not\sim^3$
e	$\not\sim^3$	$\not\sim^3$	$\not\sim^3$	$\sim^3$

Moeten nog onderzocht worden :

$$
\begin{aligned}
a \sim^3 e \quad \Longleftrightarrow \quad \wedge_c \quad & [c \sim^2 e \rightarrow c \sim^2 a] \\
& a \sim^2 e \rightarrow a \sim^2 a \\
& b \sim^2 e \rightarrow b \sim^2 a \\
& d \sim^2 e \rightarrow d \sim^2 a \\
& e \sim^2 e \rightarrow e \sim^2 a \qquad \text{dus } a \sim^3 e
\end{aligned}
$$

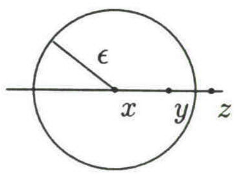
$$
\begin{aligned}
b \sim^3 d \quad \Longleftrightarrow \quad \wedge_c \quad & [c \sim^2 d \rightarrow c \sim^2 b] \\
& a \sim^2 d \rightarrow a \sim^2 b \\
& b \sim^2 d \rightarrow b \sim^2 b \\
& d \sim^2 d \rightarrow d \sim^2 b \\
& e \sim^2 d \rightarrow e \sim^2 b \qquad \text{dus } b \sim^3 d
\end{aligned}
$$

We verkrijgen uiteindelijk het volgende resultaat :

$\sim^1$	$\sim^2$	$\sim^3$
$a \sim^1 a$	$a \sim^2 a$	$a \sim^3 a$
$a \sim^1 e$	$e \sim^2 a$	$a \sim^3 e$
$b \sim^1 b$	$b \sim^2 b$	$b \sim^3 b$
$b \sim^1 d$	$d \sim^2 b$	$b \sim^3 d$
$d \sim^1 d$	$d \sim^2 d$	$d \sim^3 d$
$e \sim^1 e$	$e \sim^2 e$	$e \sim^3 e$

We merken op: $\sim^1 = \sim^3$. Hiermede eindigt voorbeeld 1.

Aan de relatie $\sim^1$ kunnen we de volgende interpretatie geven:



Stel $d(x,y) < \epsilon$. Dan $x \sim_\epsilon y$, d.w.z. x en y zijn niet te onderscheiden. Als er een z is met $d(y,z) < \epsilon$ en $d(x,z) > \epsilon$, dan $z \sim_\epsilon y$ maar $z \not\sim_\epsilon x$; en derhalve $x \not\sim^1_\epsilon y$. De relatie $\sim^1$ laat ons toe de buitenwereld te onderzoeken met een nauwkeurigheid die groter is dan ϵ, waar ϵ de 'kleinste afstand' is die we in de buitenwereld kunnen onderscheiden. Wiskundig nadenken over de buitenwereld levert dus nauwkeurigere informatie op dan deze die enkel door observatie kan verkregen worden.

We hebben de volgende situatie (zie stelling 4 en 5):

$$x \sim^2 y \Rightarrow y \sim^1 x \Rightarrow x \sim y.$$

De relatie $\sim^2$ laat op haar beurt toe de buitenwereld te onderzoeken met een grotere nauwkeurigheid dan die van $\sim^1$.

Uit het voorbeeld 1 blijkt echter dat de nauwkeurigheid begrensd is aangezien $\sim^3 = \sim^1$. We zullen dit algemeen aantonen.

Zij R een willekeurige binaire relatie over $V = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. We associëren hiermede een $n \times n$ matrix waarvan de elementen bestaan uit 0 en 1. We noemen dit de relatiematrix $M(R)$ van R. Zij $[M(R)]_{ij}$ het element van de i^{de} rij en de j^{de} kolom. We definiëren $M(R)$ als volgt:

$$[M(R)]_{ij} \begin{cases} = 1 & \text{als } a_i R a_j \\ = 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Vertrekken we van de graaf $(V, \sim)$, dan wordt $[M(\sim)]_{ij}$ de adjacentie matrix van de graaf $(V, \sim)$ genoemd.

We definiëren nu een dominantierelatie tussen de verschillende kolommen van een willekeurige $n \times n \quad (0,1)$ matrix als volgt:

Zij $k, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad k \neq j$.

De kolom k domineert de kolom $j \Longleftrightarrow$

$$M(R)_{ij} = 1 \Longrightarrow M(R)_{ik} = 1 \qquad \text{voor alle } i.$$

Matrix 6 geeft hiervan een voorstelling.

$$
\begin{array}{cc|c|c|c|c}
 & a_0 \ldots & a_k & \ldots & a_j & \ldots a_n \\
a_0 & & 0 & & 0 & \\
\vdots & & 0 & & 0 &
\end{array}
$$

$$
\Delta_0(a_k)\left\{
\begin{array}{cc|c|c|c|c}
\vdots & \times\!\!-\!\!- & 1 & & 1 & -\!\!-\!\!\times \\
\vdots & \times\!\!-\!\!- & 1 & -\!\!- & 0 & \\
\vdots & & 0 & & 0 & \\
a_i & \times\!\!-\!\!- & 1 & -\!\!- & 1 & -\!\!-\!\!\times \\
\vdots & \times\!\!-\!\!- & 1 & -\!\!- & 0 & \\
a_j & \times\!\!-\!\!- & 1 & -\!\!- & 1 & -\!\!-\!\!\times \\
\vdots & & 0 & & 0 & \\
\vdots & \times\!\!-\!\!- & 1 & -\!\!- & 0 & \\
\vdots & \times\!\!-\!\!- & 1 & -\!\!- & 1 & -\!\!-\!\!\times \\
a_n & & 0 & & 0 &
\end{array}
\right\}\Delta_0(a_j)
$$

Matrix 6:

De 1-en uit de k^{de} kolom 'bedekken' dan de 1-en uit de j^{de} kolom. Aangezien de 1-en van een zekere kolom a_k juist de rijen aanduiden van de knopen a_i die adjacent zijn met a_k, d.w.z. waarvoor $a_i R a_k$, en dus de elementen van $\Delta_0(a_k) = \{a_i | a_i R a_k\}$ zijn, betekent het domineren van de k^{de} kolom t.o.v. de j^{de} kolom dat $\Delta_0(a_j) \subseteq \Delta_0(a_k)$. M.a.w. dat $a_k \sim^1 a_j$, in het geval dat $R = \sim$.

Voor voorbeeld 1 hebben we gevonden dat $\sim^3 = \sim^1$. We gaan nu aantonen dat voor iedere binaire relatie $\sim$ op V er een natuurlijk getal n bestaat zo dat $\sim^n = \sim^1$.

Heeft men de matrix $M(\sim)$ neergeschreven, dan kan men daaruit onmiddellijk de matrix $M(\sim^1)$ afleiden. Om te beslissen of het element $[M(\sim^1)]_{kj}$ een 0 of een 1 is moet men enkel nagaan of de k^{de} kolom in $M(\sim)$ de j^{de} kolom in $M(\sim)$ niet of wel domineert.

Men kan het procédé nu voortzetten.

$$M(\sim^1) \to M(\sim^2), \ldots, M(\sim^n).$$

Op het ogenblik dat $M(\sim^n) = M(\sim^1)$ stoppen we en vinden we de orde van $\sim^1$.

Definitie 5 : *Is R een binaire relatie over X, dan noteren we de converse relatie met R^{-1}, waarbij $R^{-1} = \{(y, x) \in X \times X \mid (x, y) \in R\}$. We hebben dan*

$$R \text{ is symmetrisch} \iff R = R^{-1}.$$

Stelling 7 : $\sim^2 = (\sim^1)^{-1}$. *Is $\sim^1$ symmetrisch (en dus een equivalentie relatie), dan hebben we dat $\sim^1 = \sim^2 = \sim^n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.*

Bewijs : We tonen eerst aan dat $\sim^2 = (\sim^1)^{-1}$. Daartoe laten we zien dat

$$a \sim^1 b \iff a(\sim^2)^{-1}b,$$

$$\text{ofwel } a \sim^1 b \iff b \sim^2 a,$$

$$\text{ofwel } a \sim^1 b \iff \triangle_1(a) \subseteq \triangle_1(b).$$

Het bewijs bestaat uit twee delen:

1. $a \sim^1 b \Rightarrow \triangle_1(a) \subseteq \triangle_1(b)$.

Stel $a \sim^1 b$ en $x \in \triangle_1(a)$ d.w.z. $x \sim^1 a$.

Omdat $\sim^1$ transitief is, $x \sim^1 b$, m.a.w. $x \in \triangle_1(b)$.

Dus als $a \sim^1 b$, dan $\triangle_1(a) \subseteq \triangle_1(b)$; m.a.w., als $a \sim^1 b$, dan $b \sim^2 a$.

2. $\triangle_1(a) \subseteq \triangle_1(b) \Longrightarrow a \sim^1 b$.

Stel $\triangle_1(a) \subseteq \triangle_1(b)$, dus $b \sim^2 a$; d.w.z. $\wedge_{c \in V} [c \sim^1 a \rightarrow c \sim^1 b]$. Neem $c = a$, dan volgt $a \sim^1 b$.

We hebben nu aangetoond dat

$$a \sim^1 b \Leftrightarrow \triangle_1(a) \subseteq \triangle_1(b) \Leftrightarrow b \sim^2 a.$$

Dus $\sim^1 = (\sim^2)^{-1}$, ofwel $\boxed{(\sim^1)^{-1} = \sim^2}$. Uit dit laatste volgt: $\sim^1 = \sim^2 \Leftrightarrow \sim^1$ is symmetrisch. Is $\sim^1$ symmetrisch dan kunnen we op analoge wijze aantonen dat

$\sim^1 = \sim^2 = \sim^3 = \cdots = \sim^n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Definitie 6: *De orde van* $\sim^1$ *is per definitie:*

$$\inf\{n \in \mathbb{N} \mid \sim^1 = \sim^n, \quad n \neq 1\}.$$

Stelling 8: **(i)** $\sim^1 = \sim^{2n+1}$ *voor alle* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) *Als* $\sim^1$ *symmetrisch is, dan zelfs* $\sim^1 = \sim^n$ *voor alle* $n \in \mathbb{N}$.

Bewijs:

(i) Uit Stelling 7 weten we dat $\sim^1 = (\sim^2)^{-1}$. We tonen nu aan dat $\sim^3 = (\sim^2)^{-1}$.

Stel $a \sim^3 b$, d.w.z. $\bigwedge_{c\in V}[c \sim^2 b \to c \sim^2 a]$. Aan te tonen: $a(\sim^2)^{-1}b$ ofwel $b \sim^2 a$. Welnu, neem $c = b$.

Omgekeerd, stel $a(\sim^2)^{-1}b$, d.w.z. $b \sim^2 a$. Aan te tonen: $a \sim^3 b$, d.w.z.

$$\bigwedge_{c\in V}[c \sim^2 b \to c \sim^2 a].$$

Stel dus $c \sim^2 b$. Omdat $\sim^2$ transitief is, volgt $c \sim^2 a$.

We hebben nu aangetoond dat

$$\sim^2 = (\sim^3)^{-1},$$

ofwel dat

$$(\sim^2)^{-1} = \sim^3 .$$

Daar $\sim^1 = (\sim^2)^{-1}$, volgt dat $\sim^1 = \sim^3$. De orde van $\sim^1$ is hoogstens 3.

(ii) Zie Stelling 7. De orde van $\sim^1$ is dan 2. $\square$

Definitie 7: $x \sim_1 y \iff \bigwedge_{c\in V}[c \sim y \leftrightarrow c \sim x]$

Deze binaire relatie heeft volgende eigenschappen:

1. $\sim_1$ is reflexief. $x \sim_1 y \iff \bigwedge_{c\in V}[c \sim y \leftrightarrow c \sim x]$. Dit is gelijkwaardig met $\Delta_0(y) = \Delta_0(x)$. $x \sim_1 x$ is gelijkwaardig met $\Delta_0(x) = \Delta_0(x)$.

2. $\sim_1$ is symmetrisch.

   $x \sim_1 y \iff \bigwedge_c[c \sim y \leftrightarrow c \sim x] \iff \Delta_0(y) = \Delta_0(x) \iff y \sim_1 x.$

3. $\sim_1$ is transitief.

Stel $x \sim_1 y$, d.w.z. $\wedge_c[c \sim y \leftrightarrow c \sim x]$, ofwel $\triangle_0(y) = \triangle_0(x)$.

Stel ook $y \sim_1 z$, d.w.z. $\wedge_c[c \sim z \leftrightarrow c \sim y]$, ofwel $\triangle_0(z) = \triangle_0(y)$.

Waaruit $\triangle_0(x) = \triangle_0(z)$ of $x \sim_1 z$.

Uit (1) (2) (3) volgt dat $\sim_1$ een equivalentierelatie is.

Definitie 8 :

$$\begin{aligned} \sim_0 \quad &= \quad \sim \\ x \sim_n y \quad &\Leftrightarrow \quad \wedge_{c \in V}\left[c \sim_{n-1} y \leftrightarrow c \sim_{n-1} x\right] \\ \triangle_n^*(x) \quad &= \quad \{y \in V \mid y \sim_n x\} \end{aligned}$$

Uit definitie 8 volgt : $x \sim_n y \Leftrightarrow \triangle_{n-1}^*(y) = \triangle_{n-1}^*(x)$.

Stelling 9 : $\sim_1 = \sim_2 = \ldots = \sim_n$ *voor alle* $n \in \mathbb{N}$

Bewijs : We tonen aan dat

$$a \sim_1 b \Longleftrightarrow a \sim_2 b.$$

Uit definitie 8 volgt : $a \sim_2 b \Longleftrightarrow \triangle_1^*(a) = \triangle_1^*(b)$. Het bewijs van Stelling 9 bestaat uit twee delen.

1. $a \sim_1 b \Longrightarrow \triangle_1^*(a) = \triangle_1^*(b)$

$\sim_1$ is een equivalentierelatie.

$\triangle_1^*(a) = \{x \mid x \sim_1 a\}$ en $\triangle_1^*(b) = \{x \mid x \sim_1 b\}$ zijn equivalentieklassen.

Stel $a \sim_1 b$. Dan $a \in \triangle_1^*(b)$.

Daar $\sim_1$ reflexief is, geldt ook $a \sim_1 a$.

Dus ook $a \in \triangle_1^*(a)$, waaruit $a \in \triangle_1^*(a) \cap \triangle_1^*(b)$. De equivalentieklassen zijn niet leeg, waaruit $\triangle_1^*(a) = \triangle_1^*(b)$.

2. $\triangle_1^*(a) = \triangle_1^*(b) \Longrightarrow a \sim_1 b$. Welnu, $a \in \triangle_1^*(a)$; stel nu $\triangle_1^*(a) = \triangle_1^*(b)$, dan $a \in \triangle_1^*(b)$, dus $a \sim_1 b$. □

1 Axiomatisering

Veronderstel dat wij een quasi-afstandsfunctie hebben

$$d : V \times V \to [0, \infty), \text{ een } \epsilon > 0$$

en

$$x \sim y \Longleftrightarrow d(x, y) \leq \epsilon.$$

$T_d \subseteq V^4$ wordt als volgt gedefinieerd:

$$T_d(w, x, y, z) \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} d(w, x) \leq d(y, z).$$

Intuïtief geïnterpreteerd betekent $T_d(w, x, y, z)$: w lijkt minstens even goed op x als y op z. Veronderstellen we verder: $d(x_0, y_0) = \epsilon$, dan krijgen we:

$$x \sim y \Longleftrightarrow T_d(x, y, x_0, y_0).$$

Stel $< V, T >$ met $T \subseteq V^4$ voldoet aan de volgende axioma's (zie [20]):

$(T_1)\qquad T(w,x,y,z) \vee\ T(y,z,w,x)$

$(T_2)\qquad T(u,v,w,x) \rightarrow\ (T(w,x,y,z) \rightarrow T(u,v,y,z))$

$(T_3)\qquad T(x,x,y,z)$

$(T_4)\qquad T(x,y,y,y)\ \rightarrow\ x=y$

$(T_5)\qquad T(x,y,y,x)$

Wanneer d een quasi-afstandsfunctie is op V en

$$T_d(w,x,y,z) \Longleftrightarrow d(w,x) \leq d(y,z)$$

dan volgt daaruit dat aan $T_1,\ldots,T_5$ voldaan is.

Gegeven een T die voldoet aan bovenstaande axioma's, definiëren we de volgende binaire relaties op $V \times V$.

Definitie 9 : $R_1[(x,y),(u,v)] \Longleftrightarrow T(x,y,u,v)$.

Lemma 1 : *R_1 is reflexief, transitief en totaal.*

Bewijs : Reflexief : $R_1[(x,y),(x,y)] \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} T(x,y,x,y)$.

$T(x,y,x,y)$ volgt uit T_2+T_5 :

$T(x,y,y,x) \rightarrow (T(y,x,x,y) \rightarrow T(x,y,x,y))$.

Transitief : We moeten aantonen dat

$$R_1[(x,y),(u,v)] \wedge R_1[(u,v),(w,z)] \Longrightarrow R_1[(x,y),(w,z)].$$

Dit volgt onmiddellijk uit T_2 :

$$T(x,y,u,v) \rightarrow (T(u,v,w,z) \rightarrow T(x,y,w,z)).$$

Totaal: We moeten aantonen dat

$$R_1[(x,y),(u,v)] \vee R_1[(u,v),(x,y)]$$

ofwel

$$T(x,y,u,v) \vee T(u,v,x,y),$$

en dit is T_1. □

Verder definiëren we:

Definitie 10: $R_2[(x,y),(u,v)] \Longleftrightarrow R_1[(x,y),(u,v)] \wedge R_1[(u,v),(x,y)]$

Lemma 2: *R_2 is een equivalentierelatie op $V \times V$.*

Bewijs:

- R_2 is reflexief: volgt uit definitie vanR_2 en lemma 1.
- R_2 is symmetrisch. We moeten aantonen:

$R_2[(x,y),(w,z)] \Longrightarrow R_2[(w,z),(x,y)]$. Welnu,

$R_2[(x,y),(w,z)] \Longleftrightarrow T(x,y,w,z) \wedge T(w,z,x,y)$, en

$R_2[(w,z),(x,y)] \Longleftrightarrow T(w,z,x,y) \wedge T(x,y,w,z)$.

- R_2 is transitief. We moeten aantonen dat:

$R_2[(x,y),(u,v)] \wedge R_2[(u,v),(w,z)] \Longrightarrow R_2[(x,y),(w,z)]$. Dit volgt onmiddellijk uit de definitie van R_2 en uit lemma 1. □

Definitie 11 : $R_3[(x,y)modR_2,(u,v)modR_2] \Longleftrightarrow R_1[(x,y),(u,v)]$.

We willen aantonen dat R_3 een totale orderelatie is op $\Omega = V \times V/R_2$.

Daartoe moeten we aantonen dat :

R_3 is :
- Reflexief
- Transitief
- Antisymmetrisch
- Totaal

Maar eerst en vooral moeten we laten zien dat R_3 onafhankelijk is van de keuze van de representanten van de equivalentieklassen.

Stel (x',y') zit in dezelfde klasse als (x,y)
(u',v') zit in dezelfde klasse als (u,v).

We moeten aantonen dat :

$R_3[(x,y) \bmod R_2,(u,v) \bmod R_2] \Longleftrightarrow R_3[(x',y') \bmod R_2,(u',v') \bmod R_2]$.

We tonen eerst aan :

$R_3[(x,y) \bmod R_2,(u,v) \bmod R_2] \Longrightarrow R_3[(x',y') \bmod R_2,(u',v') \bmod R_2]$.

Stel dus $R_3[(x,y) \bmod R_2,(u,v) \bmod R_2]$, d.w.z. $R_1[(x,y),(u,v)]$ ofwel

$$T(x,y,u,v). \tag{1}$$

Veronderstel verder dat (x',y') in dezelfde klasse zit als (x,y) en (u',v') in dezelfde klasse zit als (u,v), dan geldt :

$$R_2[(x,y),(x',y')] \text{ en } R_2[(u,v),(u',v')],$$

d.w.z.

$$T(x,y,x',y') \quad \wedge \quad T(x',y',x,y) \tag{2}$$

$$\text{en } T(u,v,u',v') \quad \wedge \quad T(u',v',u,v). \tag{3}$$

We moeten aantonen dat $T(x',y',u',v')$.

Welnu uit 2 en 1 volgt m.b.v. axioma T_2 $\quad T(x',y',u,v)$. (4)

Uit 4 en 3 volgt m.b.v. axioma T_2 $\quad T(x',y',u',v')$.

Het bewijs van

$$R_3[(x',y')\text{mod}R_2,(u',v')\ \text{mod}R_2] \Longrightarrow R_3[(x,y)\ \text{mod}R_2,(u,v)\ \text{mod}R_2]$$

verloopt identiek.

Stelling 10: *R_3 is een totale orderelatie op $V \times V/R_2$*

Bewijs: R_3 is reflexief: Volgt uit de definitie van R_3 en uit de reflexiviteit van R_1.

R_3 is transitief: Volgt uit de definitie van R_3 en uit de transitiviteit van R_1.

R_3 is totaal: Volgt uit de definitie van R_3 en uit de totaliteit van R_1.

R_3 is antisymmetrisch: Inderdaad:

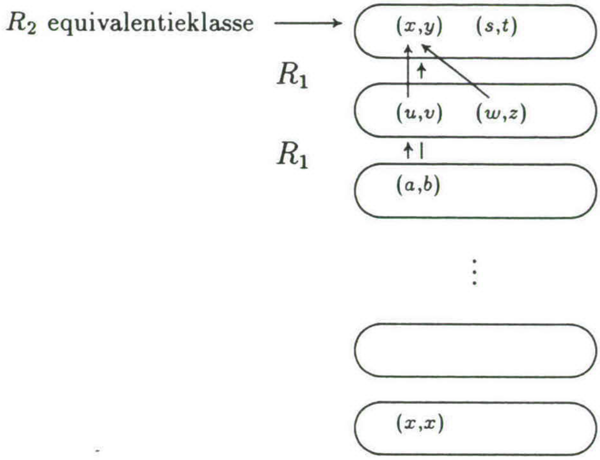
$R_3[(x,y)\text{mod}R_2,(u,v)\text{mod}R_2] \wedge R_3[(u,v)\text{mod}R_2,(x,y)\text{mod}R_2] \overset{\text{Def}}{\Longrightarrow}$

$R_1[(x,y),(u,v)] \wedge R_1[(u,v),(x,y)] \overset{\text{Def}}{\Longrightarrow} R_2[(x,y),(u,v)] \Longrightarrow$

$(x,y)\text{mod}R_2 = (u,v)\text{mod}R_2$.

De laatste pijl volgt uit het feit dat R_2 een equivalentierelatie is. We hebben aangetoond dat R_3 een totale orderelatie is op $\Omega = V \times V / R_2$. □

De R_2 equivalentieklassen in $V \times V$ worden door R_3 als volgt geordend:



Als V een eindige verzameling is, dan hebben we eindig veel R_2 equivalentie klassen in $V \times V$.

Stel dat (x, y) en (s, t) twee paren zijn uit de bovenste R_2 equivalentieklasse, dan geldt:

$$R_2[(x,y),(s,t)] = R_1[(x,y),(s,t)] \wedge R_1[(s,t),(x,y)] = T(x,y,s,t) \wedge T(s,t,x,y).$$

Intuïtief betekent dit: x lijkt even veel op y als s op t.

Zijn nu (u, v) en (w, z) twee paren uit de tweede R_2 equivalentie klasse. Dan geldt eveneens:

$$R_2[(u,v),(w,z)] = R_1[(u,v),(w,z)] \wedge R_1[(w,z),(u,v)].$$

Ieder paar uit een lager liggende klasse staat in R_1 relatie met ieder paar uit een hoger liggende klasse. Inderdaad:

Stel dat $\quad R_1[(u,v),(x,y)] = T(u,v,x,y)$

en $\quad R_1[(a,b),(u,v)] = T(a,b,u,v).$

Uit T_2 volgt:

$$T(a,b,u,v) \rightarrow (T(u,v,x,y) \rightarrow T(a,b,x,y))$$

en dus

$$R_1[(a,b),(x,y)], \text{ ofwel } T(a,b,x,y).$$

In de onderste R_2 equivalentie klasse staan de paren (x,x).

Zij gegeven een quasi metrische ruimte (V,d), $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$ waarvoor:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= 0 \Longleftrightarrow x = y, \text{ en} \\ d(x,y) &= d(y,x) \text{ voor iedere } (x,y) \in V \times V. \end{aligned}$$

Met (V,d) hebben we een T-ruimte geassocieerd:

$$T_d(x,y,u,v) \Longleftrightarrow d(x,y) \leq d(u,v).$$

De axioma's T_1 tot en met T_5 zijn dan vervuld.

Definitie 12: *We noemen (V_1,d_1) T-equivalent met (V_2,d_2), en we noteren:*

$$(V_1,d_1) \underset{T}{\cong} (V_2,d_2) \textit{ indien } (V_1,T_{d_1}) \cong (V_2,T_{d_2}),^{\ddagger} \textit{ d.w.z.}$$

‡ $\cong$:Isomorf.

wanneer er een $f : V_1 \to V_2$ *bestaat die bijectief is, zó dat*

$$T_{d_1}(x, y, u, v) \Longleftrightarrow T_{d_2}[f(x), f(y), f(u), f(v)].$$

Wanneer $V_1 = V_2$ wordt dit:

$$\begin{array}{rcl} (V, d_1) \underset{T}{\cong} (V, d_2) & \Longleftrightarrow & (V, T_{d_1}) \cong (V, T_{d_2}) \\ \text{of } (V \times V, R_1^{d_1}) & \cong & (V \times V, R_1^{d_2}) \end{array}$$

als er een $f : V \to V$ bestaat die bijectief is, zódat

$$R_1^{d_1}[(x, y), (u, v)] \Longleftrightarrow R_1^{d_2}[(f(x), f(y)), (f(u), f(v))].$$

Stelling 11 : $\underset{T}{\cong}$ *is een equivalentie relatie over de klasse van de quasi-metrische ruimten.*

Bewijs : (1) <u>Reflexief:</u> $(V, d) \underset{T}{\cong} (V, d)$; triviaal, neem voor $f : V \to V$ de identieke afbeelding.

(2) <u>Symmetrisch:</u>

$$(V_1, d_1) \underset{T}{\cong} (V_2, d_2) \Longrightarrow (V_2, d_2) \underset{T}{\cong} (V_1, d_1).$$

Stel dus $(V_1, d_1) \underset{T}{\cong} (V_2, d_2)$. Hieruit volgt: Er is een bijectie

$$f : V_1 \to V_2,$$

zó dat

$$T_{d_1}(x, y, u, v) \Longleftrightarrow T_{d_2}[f(x), f(y), f(u), f(v)].$$

Neem $g : V_2 \to V_1$ met $g = f^{-1}$, dan geldt ook dat

$$T_{d_2}(x,y,u,v) \Longleftrightarrow T_{d_1}[g(x), g(y), g(u), g(v)]$$

(3) Transitief: Als $(V_1, d_1) \underset{T}{\cong} (V_2, d_2)$ en $(V_2, d_2) \underset{T}{\cong} (V_3, d_3)$, dan ook $(V_1, d_1) \underset{T}{\cong} (V_3, d_3)$. Inderdaad: Als $f : V_1 \to V_2$ bijectief is en

$$T_{d_1}(x,y,u,v) \Longleftrightarrow T_{d_2}[f(x), f(y), f(u), f(v)]$$

en $h : V_2 \to V_3$ bijectief is en

$$T_{d_2}(x,y,u,v) \Longleftrightarrow T_{d_3}[h(x), h(y), h(u), h(v)],$$

dan geldt: $h \circ f : V_1 \to V_3$ is bijectief en daarenboven geldt dat:

$T_{d_1}(x,y,u,v) \Longleftrightarrow T_{d_3}[(h \circ f)(x), (h \circ f)(y), (h \circ f)(u), (h \circ f)(v)]$. $\square$

Definitie 13: *Een functie $d : V \times V \to \mathbb{R}$ noemen we een quasi-metriek over V als:*

(i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, en

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ voor alle $x, y \in V$.

Is daarenboven nog voldaan aan

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ voor alle $x, y, z \in V$, dan noemen we $d : V \times V \to \mathbb{R}$ een metriek over V.

Stelling 12: *Voor elke quasi-metriek over eindige V bestaat er een metriek d over V die T-equivalent is met die quasi-metriek.*

Bewijs: Zij d een quasi-metriek over V en V eindig.

$$T_d(x,y,u,v) \Longleftrightarrow d(x,y) \leq d(u,v).$$

We definiëren :

$$\bar{d}^* : \Omega - \{|x,x|;\, x \in V\} \to [1,2] \text{ met } \Omega = V \times V/R_2,$$

waarbij $|x,x|$ de R_2^d-equivalentie klasse is van het paar (x,x). Merk op dat $|x,x| = |y,y|$ voor iedere $x, y \in V$.

$\bar{d}^* : \Omega - \{|x,x|;\, x \in V\} \to [1,2]$ heeft per definitie de volgende eigenschappen :

$$\begin{aligned} R_3[|x,y|,|u,v|] &\iff \bar{d}^*[|x,y|] \leq \bar{d}^*[|u,v|], \\ \bar{d}^* : \Omega - \{|x,x|;\, x \in V\} &\to [1,2] \text{ is injectief}, \\ \bar{d}^*|x,x| &= 0. \end{aligned}$$

Definitie 14 : *We definiëren* $d^* : V \times V \to \mathbb{R}^+$ *aldus :*

$$d^*(x,y) \overset{\text{Def}}{=} \bar{d}^*[|x,y|].$$

Bewering : d^* is een metriek op V en

$$(V, d^*) \underset{T}{\cong} (V, d).$$

Bewijs : We gaan eerst na dat d^* een metriek is.

$d^*(x,x) = 0$, want $d^*(x,x) = \bar{d}^*[|x,x|] = 0$.

$d^*(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ want $\bar{d}^*$ is injectief.

$d^*(x,y) = d^*(y,x)$, $(x,y) \in V \times V$, want $|x,y| = |y,x|$.

Blijft de driehoeksongelijkheid: We moeten aantonen:

$$d^*(x,y) + d^*(y,z) \geq d^*(x,z) \text{ voor iedere } x, y \text{ en } z \in V.$$

We hebben de volgende ongelijkheden:

$$\left.\begin{array}{ccccc} 1 & \leq & d^*(x,y) & \leq & 2 \\ 1 & \leq & d^*(y,z) & \leq & 2 \end{array}\right\} \text{ dus } 2 \leq d^*(x,y) + d^*(y,z) \leq 4$$

en $1 \leq d^*(x,z) \leq 2$. Verder geldt dat $(V, d^*) \underset{T}{\cong} (V, d)$. Inderdaad: We moeten daartoe laten zien dat $(V, T_{d^*}) \cong (V, T_d)$. Daarvoor moet er een bijectie $\varphi : V \to V$ zijn, zó dat

$$\begin{array}{ccc} T_{d^*}(x,y,u,v) & \Longleftrightarrow & T_d[\varphi(x),\varphi(y),\varphi(u),\varphi(v)] \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ d^*(x,y) \leq d^*(u,v) & & d(\varphi(x),\varphi(y)) \leq d(\varphi(u),\varphi(v)) \\ \Updownarrow & & \\ R_1[(x,y),(u,v)] & & \\ \Updownarrow & & \\ T_d(x,y,u,v) & & \\ \Updownarrow & & \\ d(x,y) \leq d(u,v) & & \end{array}$$

Neem voor $\varphi : V \to V$ de identieke afbeelding, dan:

$d(\varphi(x),\varphi(y)) \leq d(\varphi(u),\varphi(v)) \Longleftrightarrow d(x,y) \leq d(u,v)$. □

Verder tonen we nu aan:

Stelling 13: *Gegeven een T-ruimte (V,T), $T \subseteq V^4$, V eindig, waarbij T voldoet aan de axioma's T_1 tot en met T_5, dan bestaat er een metriek $d_T : V \times V \to \mathbb{R}^+$ zó dat $(V, T_{d_T}) \cong (V,T)$.*

Bewijs: We definiëren:

$$R_4[(x,y),(u,v)] \Longleftrightarrow R_1[(x,y),(u,v)] \wedge \neg R_2[(x,y),(u,v)].$$

Definieer $d_T : V \times V - \{(x,x)|x \in V\} \to [1,2]$ als volgt:

$R_4[(x,y),(u,v)] \Longleftrightarrow d_T(x,y) < d_T(u,v)$,

$R_2[(x,y),(u,v)] \Longleftrightarrow d_T(x,y) = d_T(u,v)$,

$d_T(x,x) = 0$,

$d_T : V \times V - \{(x,x)|x \in V\} \to [1,2]$ is injectief.

We tonen aan dat d_T een metriek is op V.

1. $d_T(x,x) = 0$.

$d_T(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$, want d_T is injectief.

2. $d_T(x,y) = d_T(y,x)$. We merken op :

$$R_2[(x,y),(y,x)], \text{ derhalve } d_T(x,y) = d_T(y,x).$$

3. $d_T(x,y) + d_T(y,z) \geq d_T(x,z)$. Inderdaad:

$$\left.\begin{array}{ccccc} 1 & \leq & d_T(x,y) & \leq & 2 \\ 1 & \leq & d_T(y,z) & \leq & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2 \leq d_T(x,y) + d_T(y,z) \leq 4$$

en

$$1 \leq d_T(x,z) \leq 2.$$

We moeten nog aantonen dat:

$$(V,T) \cong (V, T_{d_T}).$$

Daartoe moeten we laten zien dat er een $f : V \to V$ bestaat, bijectief, zó dat:

$$T(x,y,u,v) \Longleftrightarrow T_{d_T}[f(x), f(y), f(u), f(v)].$$

Neem voor $f : V \to V$ de identieke afbeelding.

Dan moeten we aantonen dat:

$$\begin{array}{ccc} T(x,y,u,v) & \Longleftrightarrow & T_{d_T}(x,y,u,v) \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ R_1[(x,y),(u,v)] & & d_T(x,y) \leq d_T(u,v) \\ \Updownarrow & & \\ d_T(x,y) \leq d_T(u,v) & & \end{array}$$

$\square$

2 De universele Random T-ruimte van niveau m

Uitgaande van een quasi-afstandsfunctie d op een verzameling V hebben we in het voorgaande een 4-plaatsig predicaat T_d gedefinieerd;

$$T_d(x,y,u,v) := d(x,y) \leq d(u,v).$$

T_d voldoet aan de axioma's T_1 tot en met T_5.

Zij $V_2 = \{\{x,y\} | x,y \in V | x \neq y\}$. In het voorgaande hebben we bij een gegeven T die voldoet aan T_1 tot en met T_5 een equivalentierelatie R_2 op V_2 gedefinieerd:

$$\{x,y\} R_2 \{u,v\} := T(x,y,u,v) \;\&\; T(u,v,x,y).$$

En de verzameling van equivalentieklassen in V_2 modulo R_2 werd lineair geordend als volgt:

$$[\{x,y\}]_{R_2}\, R_3\, [\{u,v\}]_{R_2} := T(x,y,u,v).$$

Als V nu eindig is en T een 4-plaatsig predicaat op V dat voldoet aan de axioma's T_1 tot en met T_5, dan is V_2 de disjuncte vereniging van een eindig aantal equivalentieklassen $E_0, \ldots, E_{m-1}$. De elementen van E_i noemen we bogen van kleur i.

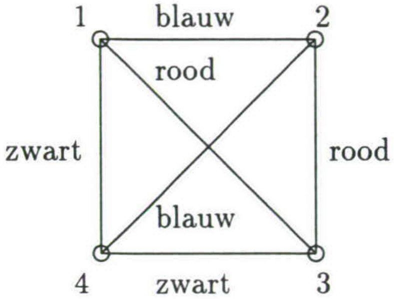
Omgekeerd, als bij een gegeven verzameling V, V_2 een disjuncte vereniging is van verzamelingen $E_0, E_1, \ldots, E_{m-1}$ en we definiëren T als

$$T(x,y,u,v) := \{x,y\} \in E_i \text{ en } \{u,v\} \in E_j$$

voor zekere i,j met $i \leq j$, dan voldoet T aan de axioma's T_1 tot en met T_5.

Een paar $\langle V,T \rangle$, waarbij V een verzameling is, T voldoet aan T_1 tot en met T_5 en $V_2 = E_0 \cup E_1 \cup \ldots \cup E_{m-1}$ een disjuncte vereniging is, is een m-gekleurde graaf. We veronderstellen dat de kleuren welgeordend zijn.

Voorbeeld 2 : *Zij $|V| = 4$. Is zwart kleur 0, rood kleur 1, blauw kleur 2, dan is in dit voorbeeld :*



$$
\begin{aligned}
E_0 &= \{\{1,4\},\{3,4\}\} \quad \text{zwart, kleur 0} \\
E_1 &= \{\{1,3\},\{2,3\}\} \quad \text{rood, kleur 1} \\
E_2 &= \{\{1,2\},\{2,4\}\} \quad \text{blauw, kleur 2}
\end{aligned}
$$

en we hebben bv. $T(1,4,1,3)$ en $T(2,3,2,4)$ en $T(3,4,1,2)\ldots$

	1	2	3	4
1	*	2	1	0
2	2	*	1	2
3	1	1	*	0
4	0	2	0	*

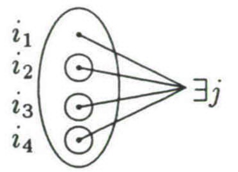
T is volledig bepaald door de gekleurde graaf en de welordening op de kleuren. Dit kan ook voorgesteld worden met een $|V| \times |V|$ matrix die symmetrisch is en een symbool $*$ op de diagonaal heeft en waarvan de elementen behoren tot $\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ en met :

$$a_{ij} = u \Leftrightarrow \{i,j\} \in E_u.$$

Definitie 15 : *Zij C een klasse van relationele structuren (bv. de m-gekleurde grafen). Zij $M \in C$. M is universeel dan en slechts dan wanneer iedere eindige structuur van de klasse C een deelstructuur is van M.*

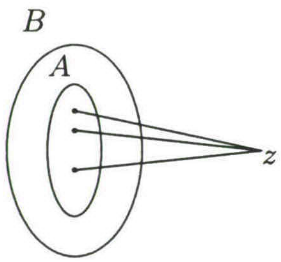
Definitie 16 : *Zij M een relationele structuur (bv. een m-gekleurde graaf). M is* homogeen *wanneer ieder isomorfisme tussen eindige deelstructuren van M kan uitgebreid worden tot een automorfisme van M.*

Stelling 14 : *Op isomorfie na is er één unieke aftelbare lineaire m-gekleurde graaf* U_m*, die universeel en homogeen is* [1, p. 33].



Voor een aftelbare lineair m-gekleurde graaf definiëren we volgende eigenschap.

<u>Eigenschap B :</u> Gegeven een eindige verzameling van knopen $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \mathbb{N}$. Hecht aan elke knoop i_v $(v = 1, 2, \ldots, k)$ een kleur $u_{i_v} \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$, dan bestaat er steeds een knoop $j \in \mathbb{N}$ zó dat $\{i_v, j\} \in E_{u_{i_v}}$ voor iedere $v \in \{1, \ldots, k\}$.



Voor $m = 2$ kan eigenschap B als volgt geformuleerd worden : Voor iedere eindige verzameling B van knopen en iedere $A \subset B$, bestaat er een knoop z, zó dat de adjacente knopen van z in B precies de knopen uit A zijn.

Definitie 17 : *u is adjacente knoop van $z := \{u, z\} \in E_1$.*

Stelling 15 : *Zij $< V, T >$ een aftelbare m-gekleurde graaf. $< V, T >$ is isomorf met U_m dan en slechts dan als $< V, T >$ de eigenschap B heeft* [1, p. 45].

Rado [15] geeft voor U_m het volgende standaardmodel en toont aan dat U_m eigenschap B heeft. Zij V aftelbaar, bv. $V = \mathbb{N}$. Om de matrix van U_m te verkrijgen moeten we de m-aire expansie zoeken van het natuurlijke getal j:

Voor $i < j$ $(i, j \in \mathbb{N})$ stellen we:

$$a_{ij} = x_i^j \Longleftrightarrow j = \sum_{v=0}^{\infty} x_v^j m^v,$$

waarbij $0 \leq x_v^j \leq m - 1$. a_{ij} is per definitie de coëfficient van m^i in de m-aire expansie van j.

Voorbeeld 3: *Is nu* $m = 3$, *dan is* $a_{05} = 2$, $a_{15} = 1$, $a_{25} = 0$, $a_{35} = 0$, $a_{45} = 0$ *want* $5 = 2.3^0 + 1.3^1$.

En $a_{07} = 1$, $a_{17} = 2$, $a_{i7} = 0$ *voor* $i \geq 2$ *aangezien* $7 = 1.3^0 + 2.3^1$.

Voor $m = 2$ ziet de matrix van de universele graaf U_2 er als volgt uit:

$$\begin{array}{c|cccccccc|c|l}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \\
\hline
0 & * & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
1 & & * & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\
2 & & & * & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \longrightarrow 8 = 1.2^3 \\
3 & & & & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
4 & & & & & * & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\vdots & & & & & & & & & &
\end{array}$$

3 De universele random Graaf

We noteren de universele m-gekleurde graaf met U_m. Kies nu de elementen a_{ij} random. Met andere woorden, voor ieder paar natuurlijke getallen $\{i, j\}$ gooien we een dobbelsteen met m nummers op:

$\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$; krijgen we nummer u, dan stellen we $a_{ij} = u$ of $\{i, j\} \in E_u$. De kans dat een zo verkregen gekleurde graaf eigenschap B heeft en dus isomorf is met U_m, is dan 1!

Inderdaad, kies bv. voor de knopen $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ de kleuren $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_k}$.

Als $j \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, dan is de kans dat

$$(a_{i_1 j}, a_{i_2 j}, \ldots, a_{i_k j}) = (u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_k})$$

gelijk aan $\frac{1}{m^k}$. De kans dat j dus geen goede knoop is, is $1 - \frac{1}{m^k}$.

Is j' een tweede knoop verschillend van de vorige, dan is de kans dat geen van beide goed zijn $(1 - \frac{1}{m^k})^2$. Neem een derde knoop j'', de kans dat j, j' en j'' niet goed zijn is $(1 - \frac{1}{m^k})^3$. Omdat

$$\lim_{n \to +\infty} (1 - \frac{1}{m^k})^n = 0,$$

is de kans dat geen enkele knoop goed is dus nul. Bijgevolg is de kans dat er wel een goede knoop is dus 1. Dus de kans dat de karakteriserende eigenschap B geldig is, is dus 1. Ofwel, de kans dat, indien men de elementen a_{ij} willekeurig kiest, men de matrix krijgt van de gekleurde graaf $\mathcal{U}_m$ is 1 (zie [1, p. 87]).[§] □

[§] Men krijgt natuurlijk niet de matrix van ons model, maar wel een matrix die daar mee equivalent is, m.a.w. een matrix $(b_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ zó dat als (a_{ij}) de standaard matrix is van $\mathcal{U}_m$ ($a_{ij} = x_i^{(j)}$ als $j = \sum_v x_v^{(j)} m^v$) er een $\pi \in \mathrm{Sym}\,(\mathbb{N})$ bestaat zó dat $b_{\pi(i)\pi(j)} = a_{ij}$.

Stelling 16 : *Is* $\langle V, T_{\mathcal{U}_m} \rangle$ *de universele* T*-ruimte met* m *equivalentie klassen,* $V \cong \mathbb{N}$, $\{x_0, y_0\} \in V_2$, *en definieert men* $x \sim y \Leftrightarrow T(x, y, x_0, y_0)$, *dan zal, als* $\{x_0, y_0\} \notin E_{m-1}$ *(de grootste), de lineaire graaf* $(\mathbb{N}, \sim)$ *steeds isomorf zijn met de universele graaf* $\mathcal{U}_2$.

Bewijs : Stel dat $\{x_0, y_0\} \in E_u$ met $0 \le u \le m-2$. Dan zal

$$x \sim y \Leftrightarrow \{x, y\} \in E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_u.$$

We willen aantonen dat deze graaf $(\mathbb{N}, \sim)$ isomorf is met de universele graaf $\mathcal{U}_2$.

Daartoe moeten we aantonen dat voor $(\mathbb{N}, \sim)$ eigenschap B geldt. Voor een 2-gekleurde graaf kan eigenschap B geformuleerd worden als volgt : Zijn A_0 en A_1 twee disjuncte eindige deelverzamelingen van $\mathbb{N}$. Dan moeten we aantonen dat er steeds een $z \in \mathbb{N}$ bestaat zó dat

$$z \sim a_0 \text{ voor alle } a_0 \in A_0$$

en

$$z \not\sim a_1 \text{ voor alle } a_1 \in A_1.$$

Omdat de universele m-gekleurde graaf eigenschap B heeft, weten we dat er een $z \in \mathbb{N}$ bestaat zódat

$$\{z, a_0\} \in E_0 \text{ voor alle } a_0 \in A_0$$

en

$$\{z, a_1\} \in E_{m-1} \text{ voor alle } a_1 \in A_1.$$

Omdat $0 \le u \le m-2$, volgt uit $\{z, a_0\} \in E_0$ dat $z \sim a_0$. En uit $\{z, a_1\} \in E_{m-1}$ dat $z \not\sim a_1$. □

Uit stelling 16 volgt dat de $\sim$-relatie, afkomstig van de universele T-ruimte met m equivalentieklassen, onafhankelijk is van de nauwkeurigheid van waarneming tenzij deze minimaal is ($\{x_0, y_0\} \in E_{m-1}$).

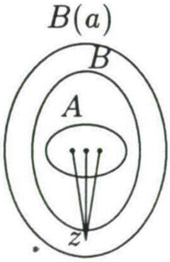
Stelling 17: *Zij $\langle V, \sim \rangle$ de universele graaf $\mathcal{U}_2$. Wij definiëren een metriek $d : V \times V \to \mathbb{R}$ als volgt:*

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &= 1 \quad \text{als } x \sim y, \\
d(x,y) &= 2 \quad \text{als } x \not\sim y, \\
d(x,x) &= 0 \quad \text{voor elke } x \in V.
\end{aligned}
$$

Neem $a \in V$, dan zal $B(a) = \{x \in V | d(x,a) = 1\}$ isomorf zijn met $\mathcal{U}_2$.

Bewijs:

Het volstaat aan te tonen dat $B(a)$ de eigenschap B heeft. Dat $B(a)$ aftelbaar oneindig is volgt uit het standaardmodel.



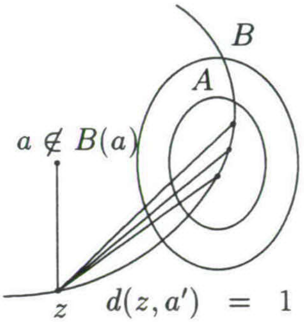
We moeten aantonen dat voor iedere eindige verzameling $B \subset B(a)$ van knopen uit $B(a)$ en iedere deelverzameling $A \subset B$, er een $z \in B(a)$ bestaat, zó dat de knopen a die adjacent zijn aan z in B (d.w.z. $a \sim z$) precies de knopen uit A zijn. Dit kan als volgt geformuleerd worden:

We merken eerst op: $z \in B(a) \Leftrightarrow d(z,a) = 1$. We moeten aantonen dat er een z bestaat zó dat:

$$
\begin{array}{llcll}
(1) & d(z,a) & = & 1 & , \\
(2) & d(z,a') & = & 1 & \text{voor alle } a' \in A, \\
(3) & d(z,b) & = & 2 & \text{voor alle } b \in B - A.
\end{array}
$$

Inderdaad :

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Noem} & A \cup \{a\} & = & A' \\
\text{en} & B \cup \{a\} & = & B'.
\end{array}
$$



Aangezien $\langle V, \sim \rangle$ de eigenschap B heeft, bestaat er een $z \in V$, zó dat de adjacente knopen van z in B' precies de knopen van A' zijn. Dus :

$$
\begin{array}{lcll}
d(z,a') & = & 1 & \text{voor alle } a' \in A' \quad = A \cup \{a\}, \\
d(z,b) & = & 2 & \text{voor alle } b \in B' - A' = B - A.
\end{array}
$$

Aangezien $a \notin B(a)$ voldoet z aan de voorwaarde (1) (2) (3). □

Stelling 18 : *Zij $\langle V, \sim \rangle$ de universele graaf $\mathcal{U}_2$. We definiëren een metriek $d : V \times V \to \mathbb{R}$ als volgt :*

$$
\begin{array}{ll}
d(x,y) = 1 & \textit{als } x \sim y, \\
d(x,y) = 2 & \textit{als } x \not\sim y, \\
d(x,x) = 0 & \textit{voor elke } x \in V.
\end{array}
$$

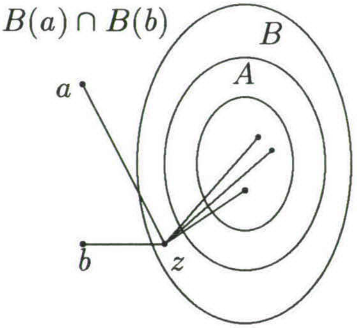
Neem $a \in V$ en $b \in V$.

$$
\begin{array}{lrcl}
\textit{Zij} & B(a) & = & \{x \in V | d(x,a) = 1\}, \\
 & B(b) & = & \{x \in V | d(x,b) = 1\}.
\end{array}
$$

Dan zal $B(a) \cap B(b)$ isomorf zijn met $\langle V, \sim \rangle$.

Bewijs : We tonen eerst aan dat voor $a \in V, b \in V, a \neq b$ steeds geldt dat $B(a) \cap B(b) \neq \varnothing$. $\{a, b\}$ is een eindige deelverzameling van $\langle V, \sim \rangle$. Aangezien de eigenschap B in $\langle V, \sim \rangle$ geldt, bestaat er een $z \in V$, zó dat $a \sim z$ en $b \sim z$. Dus :

$$\left.\begin{array}{rcl} z & \in & B(a) \\ z & \in & B(b) \end{array}\right\} \text{ en dus } B(a) \cap B(b) \neq \varnothing.$$



We tonen nu aan dat $B(a) \cap B(b)$ isomorf is met de universele graaf $\langle V, \sim \rangle$. Daartoe volstaat het aan te tonen dat $B(a) \cap B(b)$ de eigenschap B heeft. We moeten aantonen dat voor iedere eindige verzameling

$$B \subset B(a) \cap B(b)$$

en iedere deelverzameling $A \subset B$, er een $z \in B(a) \cap B(b)$ bestaat zó dat de adjacente knopen van z in B precies de knopen uit A zijn. We merken op :

$$z \in B(a) \cap B(b) \Leftrightarrow d(z, a) = 1 \text{ en } d(z, b) = 1.$$

We moeten aantonen dat er een z bestaat zó dat :

$$\begin{array}{llcll} (1) & d(z, a) & = & 1 & \text{en } d(z, b) = 1, \\ (2) & d(z, a') & = & 1 & \text{voor alle } a' \in A, \\ (3) & d(z, b) & = & 2 & \text{voor alle } b \in B - A. \end{array}$$

Inderdaad:

$$\begin{aligned} \text{Noem} \quad & A \cup \{a\} \cup \{b\} = A' \\ \text{en} \quad & B \cup \{a\} \cup \{b\} = B'. \end{aligned}$$

Aangezien $\langle V, \sim \rangle$ de eigenschap B heeft, bestaat er een $z \in V$, zó dat de adjacente knopen van z in B' precies de knopen van A' zijn. Dus:

$$\begin{aligned} d(z, a') &= 1 \text{ voor alle } a' \in A' = A \cup \{a\} \cup \{b\}, \\ d(z, b) &= 2 \text{ voor alle } b \in B' - A' = B - A. \end{aligned}$$

Aangezien $a \notin B(a)$ en $b \notin B(b)$ geldt eveneens dat $a \notin B(a) \cap B(b)$ en $b \notin B(a) \cap B(b)$ en voldoet z aan de voorwaarden (1), (2) en (3). □

Deze stelling kan als volgt gegeneraliseerd worden.

Stelling 19: *Zij $\langle V, \sim \rangle$ de universele graaf $\mathcal{U}_2$. Wij definiëren een metriek $d : V \times V \to \mathbb{R}$ als volgt:*

$$\begin{aligned} d(x, y) = 1 \quad & \textit{als } x \sim y, \\ d(x, y) = 2 \quad & \textit{als } x \not\sim y, \\ d(x, x) = 0 \quad & \textit{voor elke } x \in V. \end{aligned}$$

Neem $a_i \in V$, $\quad i = 1, 2, \ldots, n$. Zij

$$B(a_i) = \{x \in V | d(x, a_i) = 1\}.$$

Dan is

$$\bigcap_{i=1,2,\ldots,n} B(a_i)$$

isomorf met de universele graaf $\langle V, \sim \rangle$.

Het bewijs is volledig analoog met het bewijs van stelling 18. □

Nemen we in stelling 19 aftelbaar veel bollen $B(a_i)$ $i = 1, 2, \ldots, \infty$, dan is $\bigcap_i B(a_i)$ niet isomorf met de universele graaf $\langle V, \sim \rangle$. Inderdaad neem $a \in V$. Laat $X = \{x \in V; d(x, a) = 1\}$. X is aftelbaar, want V is aftelbaar. Zeg $X = \{a_1, a_2, \ldots\}$.

Bewering: $\bigcap_i B(a_i)$ is niet isomorf met V, en zelfs is $\bigcap_i B(a_i)$ een eindige verzameling.

Immers: laat $b \in \bigcap_i B(a_i)$, $b \neq a$. Daar V de eigenschap B heeft, is er een $z \in V$ met

$$d(z, b) = 2, d(z, a) = 1.$$

Dan $z \in X$, dus $z = a_i$ voor zekere i. Maar $b \in B(a_i)$, dus $b \in B(z)$, dus $d(z, b) = 1$, in tegenspraak met $d(z, b) = 2$.

Conclusie: $\bigcap_i B(a_i)$ bevat alleen a.

4 Een alternatief model voor de m-gekleurde graaf

Als standaard model voor $\mathcal{U}_m$ wordt meestal gebruikt:

Voor $i < j$ $(i, j, \in \mathbb{N})$ stellen we:

$$a_{ij} = x_i^j \Leftrightarrow j = \sum_{v=0}^{\infty} x_v^j m^v.$$

De kleur van het paar $\{i, j\}$, $i < j$, is de coëfficient van m^i in de m-aire expansie van j. Als alternatief model suggereren we het volgende. Aan ieder paar $\{n, q\}$ kennen we een kleur toe. Er zijn m verschillende kleuren: $0, 1, 2, \ldots, m-1$. We nummeren de priemgetallen als volgt:

$$p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, \ldots .$$

We ontbinden q in priemfactoren.

$$q = p_0^{c_0}.p_1^{c_1}.p_2^{c_2}\dots p_{n_1}^{c_{n_1}}$$

Stel $p_n^{c_n}|q$ en $p_n^{c_n+1}\nmid q$. We onderscheiden volgende gevallen:

(I) $0 \leq c_n \leq m-2 \Rightarrow$ De kleur van $\{n,q\}$ is c_n.

(II) $m-1 \leq c_n \Rightarrow$ De kleur van $\{n,q\}$ is $m-1$.

We moeten aantonen dat aan eigenschap B voldaan is. Daartoe volstaat het aan te tonen dat:

Gegeven een eindig aantal knopen $\{i_1,i_2,\dots,i_k\}\subset \mathbb{N}$, hecht aan iedere knoop i_v een kleur $c_{i_v}\in\{0,1,2,\dots,m-1\}$, dan bestaat er steeds een knoop $j\in\mathbb{N}$, zó dat $\{i_v,j\}$ is van kleur c_{i_v} $v=1,\dots,k$. Inderdaad: zij

$$j' = p_0^0.p_1^0.p_2^0.\dots.p_{i_1}^{c_{i_1}}.\dots.p_{i_2}^{c_{i_2}}.\dots.p_{i_k}^{c_{i_k}}$$

We onderscheiden de volgende mogelijkheden:

(I) $i_v < j'$ voor $v=1,2,\dots,k$. Neem $j=j'$.

Dan geldt $p_{i_v}^{c_{i_v}}|j$ en $p_{i_v}^{c_{i_v}+1}\nmid j, v=1,\dots,k$.

(II) $\mathrm{Max}\{i_1,i_2,\dots,i_k\}\geq j'$, zij $\mathrm{Max}\{i_1,i_2,\dots,i_k\}=i_M$.

Vorm dan

$$j = p_0^0.p_1^0\dots.p_{i_1}^{c_{i_1}}\dots.p_{i_2}^{c_{i_2}}\dots p_{i_k}^{c_{i_k}}.p_{i_M+1}$$

Dan geldt voor $v=1,\dots,k$: $p_{i_v}^{c_{i_v}}|j$ en $p_{i_v}^{c_{i_v}+1}\nmid j$. □

5 De $\aleph_0$ gekleurde graaf

Aan ieder paar $\{n, m\}$, $n < m$, kennen we een kleur toe. Er zijn oneindig aftelbaar veel kleuren $c_0, c_1, c_2, \ldots$ We nummeren de priemgetallen als volgt:

$$p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, \ldots .$$

Zij

$$m = p_0^{c_0}.p_1^{c_1}.p_2^{c_2} \ldots p_n^{c_n}.p_{n+1}^{c_{n+1}} \ldots p_S^{S}$$

de priemfactor ontbinding van m, dan is de kleur van het paar $\{n, m\}$ gelijk aan c_n, de exponent van het n^{de} priemgetal. Dit geeft ons de volgende definitie:

Definitie 18 : $\{i_v, j\}$, i_v, $j \in \mathbb{N}$, $i_v < j$, *heeft kleur*

$$c_{i_v} \textit{ dan en slechts dan als } p_{i_v}^{c_{i_v}} | j \textit{ en } p_{i_v}^{c_{i_v}+1} \nmid j.$$

We tonen aan dat aan eigenschap B voldaan is. Daartoe volstaat het aan te tonen dat: Gegeven een eindig aantal knopen

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \mathbb{N}.$$

Hecht aan iedere knoop i_v een kleur c_{i_v}, dan bestaat er steeds een knoop $j \in \mathbb{N}$, zó dat $\{i_v, j\}$ is van kleur c_{i_v}, $v = 1, \ldots, k$. Inderdaad: Zij

$$j' = p_0^0.p_1^0.p_2^0. \ldots .p_{i_1}^{c_{i_1}} \ldots .p_{i_2}^{c_{i_2}} \ldots .p_{i_k}^{c_{i_k}}.$$

De volgende mogelijkheden kunnen zich voordoen:

(I) $i_v < j'$ voor $v = 1, 2, \ldots, k$. Neem $j = j'$.

Dan geldt $p_{i_v}^{c_{i_v}} | j$ en $p_{i_v}^{c_{i_v}+1} \nmid j$, voor $v = 1, \ldots, k$.

(II) $\mathrm{Max}\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \geq j'$, zij $\mathrm{Max}\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} = i_M$. Vorm dan

$$j = p_0^0 . p_1^0 \ldots p_{i_1}^{c_{i_1}} \ldots p_{i_2}^{c_{i_2}} \ldots p_{i_k}^{c_{i_k}} \ldots p_{i_M+1}.$$

Dan geldt voor $v = 1, 2, \ldots, k \quad i_v < j$ en $p_{i_v}^{c_{i_v}} | j$ en $p_{i_v}^{c_{i_v}+1} \nmid j$. $\square$

Hoofdstuk 2

Het verband tussen quasi-orde relaties en Alexandrov topologieën

Een relatie $R \subseteq V \times V$ is een quasi-orde relatie als:

(1) R is reflexief: xRx voor alle $x \in V$ en

(2) R is transitief: xRy en $yRz \Rightarrow xRz$ voor alle $x, y, z \in V$.

Een Alexandrov-topologie is een topologie (V, τ) waarin niet alleen de transfiniete unie voor open deelverzamelingen open is, maar tevens de transfiniete doorsnede.

Daaruit volgt dat iedere topologie gedefinieerd op een eindige verzameling een Alexandrov topologie is om de triviale reden dat er maar een eindig aantal open deelverzamelingen zijn en iedere transfiniete doorsnede dus een eindige doorsnede is.

Zij R een quasi-orde relatie. Dan noemen we $\triangle_R(x) = \{y \in V \mid xRy\}$ het ideaal in de quasi-orderelatie geassocieerd aan het punt x. De verzameling der deelverzamelingen $\{\triangle_R(x) \mid x \in V\}$ voldoet dan aan de voorwaarden om een basis te vormen van een topologie.*

Inderdaad:

*Een $A \subseteq P(V)$, of een verzameling van deelverzamelingen van V, vormt de basis van een topologie zodra aan de volgende twee voorwaarden zijn voldaan:

1. $x \in \triangle_R(x)$, voor alle $x \in V$, omdat R reflexief is.

2. Als $z \in \triangle_R(x) \cap \triangle_R(y) \Rightarrow \triangle_R(z) \subseteq \triangle_R(x) \cap \triangle_R(y)$. Want als $u \in \triangle_R(z)$, dan zRu. Ook hebben we xRz en yRz (volgt uit $z \in \triangle_R(x) \cap \triangle_R(y)$). Wegens de transiviteit volgt nu xRu en yRu ofwel $u \in \triangle_R(x) \cap \triangle_R(y)$; dus $\triangle_R(z) \subseteq \triangle_R(x) \cap \triangle_R(y)$.

Beschouw nu de topologie (V, τ_R) voortgebracht door deze basis, met ander woorden

$$\tau_R = \{U \in P(V) \mid U = \bigcup_{\substack{x \in A \\ A \subseteq V}} \triangle_R(x)\} \cup \{\emptyset\}.$$

Waarom is dit een Alexandrov topologie? Het volstaat daartoe aan te tonen dat de transfiniete doorsnede van basiselementen opnieuw open is. Nu is ofwel

$$\bigcap_{\substack{x \in A \\ A \subseteq V}} \triangle_R(x) = \emptyset \in \tau_R$$

ofwel

$$\bigcap_{\substack{x \in A \\ A \subseteq V}} \triangle_R(x) \neq \emptyset$$

(1) $\bigwedge_{x \in V} \bigvee_{\alpha \in A} [x \in \alpha]$, m.a.w. de deelverzamelingen uit A vullen de hele verzameling V op.

(2) $\bigwedge_{\alpha, \beta \in A} \bigwedge_{x \in \alpha \cap \beta} \bigvee_{\gamma \in A} [x \in \gamma \subseteq \alpha \cap \beta]$.

Dan zal $\tau = \{U \in \mathcal{P}(V) \mid U = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha\} \cup \{\emptyset\}$, m.a.w. alle deelverzamelingen van V die te schrijven zijn als vereniging van elementen uit A, samen met de lege verzameling, een topologie (V, τ) vormen.

en dan voor alle z

$$z \in \bigcap_{\substack{x \in A \\ A \subseteq V}} \triangle_R(x) \Rightarrow \triangle_R(z) \subseteq \bigcap_{\substack{x \in A \\ A \subseteq V}} \triangle_R(x)$$

omdat

$$z \in \triangle_R(x) \Rightarrow \triangle_R(z) \subset \triangle_R(x)$$

voor alle $x \in A$.

Ieder punt z van

$$\bigcap_{\substack{x \in A \\ A \subseteq V}} \triangle_R(x)$$

zit in een basiselement $\triangle_R(z)$ dat volledig in die doorsnede ligt.

$$\bigcap_{\substack{x \in A \\ A \subseteq V}} \triangle_R(x)$$

is derhalve een vereniging van basiselementen $\triangle_R(z)$ en deze vereniging zit in τ, ook al is A oneindig.

Wij zullen deze afbeelding, die met elke quasi-orde relatie (V, R) over V een Alexandrov topologie (V, τ_R) associeert, F_1 noemen. Dus:

$$F_1(V, R) = (V, \tau_R).$$

Beschouw nu een willekeurige Alexandrov topologie over V: (V, τ) en noteer voor alle $x \in V$ $\bigcap_{\substack{U \in \tau \\ x \in U}} U$ met $\triangle^*(x)$, dan zal dus $\triangle^*(x) \in \tau$. Dit is de kleinste open deelverzameling rond het punt x.

We definiëren nu de volgende binaire relatie over V:

$$yR^*_\tau x := \triangle^*(x) \subseteq \triangle^*(y).$$

Omdat $\triangle^*(x) \subseteq \triangle^*(y)$ en $\triangle^*(y) \subseteq \triangle^*(z) \Rightarrow \triangle^*(x) \subseteq \triangle^*(z)$ is dit een quasi-orde relatie.

We noteren deze afbeelding, die aan elke Alexandrov-topologie over V een quasi-orde relatie associeert, met F_2; dus $F_2(V,\tau) = (V, R^*_\tau)$.

We tonen nu aan dat F_1 een bijectie is, ofwel dat $F_2 = F_1^{-1}$ en bijgevolg $R^*_{\tau_R} = R$.

Omdat $yRx \Leftrightarrow \triangle_R(x) \subseteq \triangle_R(y)$ en omdat $yR^*_{\tau_R}x \Leftrightarrow \triangle^*(x) \subseteq \triangle^*(y)$ zal dit zeker bewezen zijn als we kunnen aantonen dat

$$\triangle_R(x) = \triangle^*(x) \quad \text{voor alle } x \in V.$$

Omdat $\triangle_R(x)$ een basiselement is van (V, τ_R) en dus een open deelverzameling is die x bevat en omdat

$$\triangle^*(x) = \bigcap_{\substack{x \in \mathcal{U} \\ \mathcal{U} \in \tau}} \mathcal{U}$$

de doorsnede is van alle open deelverzamelingen die x bevatten, hebben we dus zeker dat $\triangle^*(x) \subseteq \triangle_R(x)$.

We moeten nog aantonen dat $\triangle^*(x) \subset \triangle_R(x)$ onmogelijk is. We geven een bewijs uit het ongerijmde.

Stel dat $\triangle^*(x) \subset \triangle_R(x)$ en dat $y \in \triangle_R(x)/\triangle^*(x)$.

Nu is $\triangle^*(x)$, zijnde de transfiniete doorsnede van al de open deelverzamelingen rond x, open en $x \in \triangle^*(x)$, dus moet er een basiselement bestaan dat x bevat en gelegen is in $\triangle^*(x)$; dus er is een $u \in \triangle^*(x)$, zó dat

$$x \in \triangle_R(u) \subseteq \triangle^*(x).^\dagger \qquad (*)$$

Maar $\triangle_R(u)$ is een open deelverzameling die x bevat en

$$\triangle^*(x) = \bigcap_{\substack{\mathcal{U} \in \tau \\ x \in \mathcal{U}}} \mathcal{U}$$

(dit is de kleinste open deelverzameling die x bevat). Daaruit volgt dat $\triangle_R(u) \supseteq \triangle^*(x)$.

Samen met $(*)$ geeft dit $\triangle_R(u) = \triangle^*(x)$. $x \in \triangle^*(x)$, dus $x \in \triangle_R(u)$, met andere woorden, uRx.

Ondersteld was dat $y \in \triangle_R(x)$, dus xRy. Omdat R transitief is volgt dat uRy, met andere woorden $y \in \triangle_R(u)$. Maar $\triangle_R(u) = \triangle^*(x)$. Dus $y \in \triangle^*(x)$. Dit is strijdig met de onderstelling dat $y \in \triangle_R(x)/\triangle^*(x)$.

Dus F_1 definieert een bijectie tussen de quasi-orde relaties over V en de Alexandrov-topologieën in V en meer algemeen tussen de klasse van alle quasi-orde relaties en de klasse van alle Alexandrov-topologieën.

We zijn in feite twee maal met hetzelfde bezig, gedefinieerd in een andere terminologie. Waarin ligt nu het onderscheid tussen een Alexandrov-topologie (V, τ) en de bijhorende quasi-orde relatie $F_2(V, \tau) = (V, R^*_\tau)$?

---

†Dit volgt rechtstreeks uit de definitie van een basis van een topologie: Zij (V, τ) een topologie. Zij $\omega \subset \tau$. ω is een basis voor τ als elke τ-open verzameling een vereniging is van elementen van ω. Dit is het geval als voor elke $U \in \tau$ en alle $a \in U$ een $U' \in \omega$ bestaat met $a \in U' \subset U$.

Zij V een eindig deel van de buitenwereld en zij B de verzameling van bewustzijnsinhouden die ontstaan wanneer ik V observeer.

Een Alexandrov-topologie (V, τ) beschrijft de stand van zaken in de buitenwereld, nl. de wijze waarop V ingedeeld is in deelverzamelingen. Het is een feitelijke toestand die onafhankelijk is van een observator. Zij $F_2(V, \tau) = (V, R^*_\tau)$, dit is de quasi-orde relatie geassocieerd aan (V, τ), dan beschrijft (V, R^*_τ) de stand van zaken in ons bewustzijn wanneer we het eindige deel V uit de buitenwereld observeren. In feite zouden we (B, R^*_τ) moeten schrijven i.p.v. (V, R^*_τ).

HOOFDSTUK 3

DE GROMOV-AFSTAND OF ISOMORFIE OP ϵ NA

We willen het begrip "goed lijken op" in een wiskundige vorm gieten.

Definitie 19: *Zijn (X,d) en (X',d') twee metrische ruimten en is $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, dan wordt een binaire relatie $R \subseteq X \times X'$ met $p_{r_1}R = X$ en $p_{r_2}R = X'$ een <u>ϵ-approximatie</u> genoemd* $\Leftrightarrow$

$$xRx' \text{ en } yRy' \Rightarrow |d(x,y) - d'(x',y')| \leq \epsilon,$$

$$\begin{array}{lrcl} \textit{waarbij} & p_{r_1}R & = & \{x \in X \mid \exists x' \in X' \mid (x,x') \in R\} \\ \textit{en} & p_{r_2}R & = & \{x' \in X' \mid \exists x \in X \mid (x,x') \in R\}. \end{array}$$

Definitie 20: *Is $\epsilon = \inf\{\epsilon' \in \mathbb{R}^+ \mid$ er is een ϵ'-approximatie tussen (X,d) en $(X',d')\}$ dan noemen we ϵ de <u>Gromov-afstand</u> tussen (X,d) en (X',d')* [14].

<u>Notatie:</u> $d_G\left[(X,d),(X',d')\right] = \epsilon$

We willen aantonen dat de Gromov-afstand een metriek is over een deelverzameling van de klasse van metrische ruimten. We laten eerst zien aan de hand van een voorbeeld dat de Gromov-afstand geen metriek is over de klasse van alle metrische ruimten. We geven daartoe een voorbeeld van twee niet isometrische metrische ruimten met Gromov-afstand nul.

Voorbeeld 4 (A. van Rooij): Neem $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}, X' = X \cup \{0\}$. Laat d en d' afkomstig zijn van de gewone metriek van $\mathbb{R}$. (X, d) en (X', d') zijn niet isometrisch, want in X' ligt een tweetal punten met afstand 1, in X niet. Maar laat $N \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Definieer
$f_N : X \to X'$ door:

$$\begin{aligned} f_N(\frac{1}{n}) &= \frac{1}{n} \text{ als } n < N \\ f_N(\frac{1}{N}) &= 0 \\ f_N(\frac{1}{n}) &= \frac{1}{n-1} \text{ als } n > N \end{aligned}$$

Gemakshalve schrijven we verderop f in plaats van f_N. f is een bijectie. Voor elke $x \in X$ is $|x - f(x)| \leq \frac{1}{N}$, want of $f(x) = x$ of x en $f(x)$ liggen beide in $[0, \frac{1}{N}]$; dus voor alle x en y in X geldt dat:

$$\begin{aligned} |d(x,y) - d'(f(x), f(y))| &= \Big| |x-y| - |f(x) - f(y)| \Big| \leq \\ &\leq |x - f(x)| + |y - f(y)| \leq \frac{2}{N}. \end{aligned}$$

Dus voor elke N is f_N een $\frac{2}{N}$-approximatie.

Blijkbaar is

$$d_G[(X, d), (X', d')] \leq \frac{2}{N}$$

voor elke N, dus

$$d_G[(X, d), (X', d')] = 0.$$

Op de klasse van alle metrische ruimten geldt voor de Gromov-afstand verder:

(i) $d_G[(X,d),(X,d)] = 0$ voor iedere (X,d). Volgt onmiddellijk uit de definitie van Gromov-afstand. Neem voor R de identieke relatie op X.

(ii) $d_G[(X,d),(X',d')] = d_G[(X',d'),(X,d)]$. Volgt eveneens op triviale wijze uit de definitie van Gromov-afstand.

$|d(x,y) - d'(x',y')| = |d'(x',y') - d(x,y)|$.

(iii) De driehoeksongelijkheid. Daartoe moeten we aantonen dat:

$$d_G[(X,d),(X'',d'')] \leq d_G[(X,d),(X',d')] + d_G[(X',d'),(X'',d'')].$$

Laat $d_G[(X,d),(X',d')] = \alpha$ en $d_G[(X',d'),(X'',d'')] = \beta$.

Laat $\epsilon > 0$.

Er is een $(\alpha+\epsilon)$-approximatie R tussen (X,d) en (X',d').

Er is een $(\beta+\epsilon)$-approximatie S tussen (X',d') en (X'',d'').

Definieer de relatie $T \subseteq X \times X''$ door: $xTx'' \Leftrightarrow$ er is $x' \in X'$ met xRx' en $x'Sx''$. Dan: $p_{r_1}T = X$, $p_{r_2}T = X''$. Als xTx'' en yTy'', dan zijn er dus x' en y' met xRx', yRy', $x'Sx''$, $y'Sy''$. Dan

$$\begin{array}{rcccccc} |d(x,y) - d''(x'',y'')| & \leq & |d(x,y) - d'(x',y')| & + & |d'(x',y') - d''(x'',y'')| \\ & \leq & \alpha+\epsilon & + & \beta+\epsilon. \end{array}$$

Dus is T een $(\alpha+\beta+2\epsilon)$-approximatie tussen (X,d) en (X'',d'').

Dus

$$d_G\left[(X,d),(X'',d'')\right] \leq \alpha + \beta + 2\epsilon,$$

dit voor elke ϵ, dus

$$d_G\left[(X,d),(X'',d'')\right] \leq \alpha + \beta.$$

Het bewijs van eigenschap (i) (ii) (iii) kan herhaald worden wanneer we in plaats van metrieken quasi-afstandsfuncties nemen.

We zoeken nu een klasse van quasi-metrische ruimten waarop de Gromov-afstand een metriek is.

Definitie 21 : *We noemen twee quasi-metrische ruimten H-equivalent wanneer hun Gromov-afstand nul is.*

Zij nu d een afbeelding $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$, waarvoor geldt :

(i) $d(x,x) = 0$ voor iedere $x \in X$,

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ voor alle $x, y \in X$,

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ voor alle $x, y, z \in X$.

We voeren volgende relatie in :

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} d(x,y) = 0$$

Dit is een equivalentierelatie, we noemen deze de H-equivalentierelatie. Zij $X^* = X/\sim$ de verzameling der H-equivalentieklassen.

We definiëren een nieuwe afbeelding :

$d^*(x(\text{mod } \sim), y(\text{mod } \sim)) = d(x,y)$. Deze definitie heeft betekenis als we kunnen aantonen dat uit:

$x \sim x'$ en $y \sim y' \Rightarrow d(x,y) = d(x',y')$

Het bewijs verloopt als volgt: Stel $x \sim x'$ en $y \sim y'$.

$x \sim x' \Longleftrightarrow d(x,x') = 0$

$y \sim y' \Longleftrightarrow d(y,y') = 0$

$$d(x',y) \leq d(x',x) + d(x,y)$$

$$d(x',y) \leq d(x,y) \qquad *$$

en $\quad d(x',y') \leq d(x',y) + d(y,y')$

uit * volgt nu:

$$d(x',y') \leq d(x',y) \leq d(x,y).$$

Dus: $\quad \boxed{d(x',y') \leq d(x,y)} \qquad **$

Anderzijds:

$$d(x,y') \leq d(x,x') + d(x',y')$$

$$d(x,y') \leq d(x',y') \qquad ***$$

en $\quad d(x,y) \leq d(x,y') + d(y',y)$; $\quad$ uit *** volgt:

of $\quad d(x,y) \leq d(x,y') \leq d(x',y')$.

Dus: $\quad \boxed{d(x,y) \leq d(x',y')}$

Samen met ** geeft dit $d(x',y') = d(x,y)$.

Nemen we nu voor:

$\mathcal{X}$: De klasse der quasi-metrische ruimten;

d : Gromov-afstand;

$\sim$: H-equivalentierelatie.

Dan volgt uit het voorgaande dat de Gromov-afstand op de H-equivalentieklassen een metriek is.

Definitie 22: *Zijn (X,d) en (X',d') metrische ruimten en is f een afbeelding $f: X \to X'$, zó dat $d(x,y) = d'(f(x), f(y))$, $\quad x,y \in X$ dan heet f een isometrie. Is f bovendien surjectief, dan is f een isomorfisme van metrische ruimten.*

Uit deze definitie volgt nu:

(i) Als R een 0-approximatie is tussen twee quasi-metrische ruimten (X,d) en (X',d'), dan is R een bijectie van X naar X' en zijn (X,d) en (X',d') isomorf.

(ii) Bestaat er tussen twee quasi-metrische ruimten (X,d) en (X',d') geen 0-approximatie, maar wel een ϵ-approximatie voor iedere $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, dan is $d_G[(X,d),(X',d')] = 0$ maar (X,d) en (X',d') zijn niet noodzakelijk isomorf (zie voorbeeld 4).

(iii) Indien de nauwkeurigheid van onze waarneming maximaal ϵ is, dan zullen twee niet-isomorfe quasi-metrische ruimten (X,d) en (X',d') waarvoor geldt dat $d_G[(X,d),(X',d')] < \epsilon$ als dezelfde waargenomen worden.

Definitie 23: *Op de verzameling* $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *van de H-equivalentieklassen definiëren we volgende limiet*

$\lim_{n\to+\infty}(X_n, d_n) = (X_0, d_0) \Leftrightarrow$

$\wedge_{\epsilon\in\mathbb{R}^+} \vee_{m\in\mathbb{N}} \wedge_{n>m} \Big[d_G[(X_n, d_n), (X_0, d_0)] \ < \ \epsilon \Big].$

Uit Definitie 23 volgt onmiddellijk:

Een rij $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \ldots$ kan niet meer dan één limiet (modulo H-equivalentie) hebben. Inderdaad, zijn zowel (X_a, d_a) als (X_b, d_b) limieten van de rij

$$(X_1, d_1), (X_2, d_2), \ldots,$$

dan is

$$0 \le d_G\Big[(X_a, d_a), (X_b, d_b)\Big] \le d_G\Big[(X_a, d_a), (X_n, d_n)\Big] + d_G\Big[(X_b, d_b), (X_n, d_n)\Big]$$

voor elke n; terwijl

$$\lim_{n\to+\infty}\Big[d_G\big[(X_a, d_a), (X_n, d_n)\big] + d_G\big[(X_b, d_b), (X_n, d_n)\big]\Big] = 0;$$

dus moet

$$d_G[(X_a, d_a), (X_b, d_b)] = 0.$$

Dus

$$(X_a, d_a) \overset{\mathrm{H}}{\sim} (X_b, d_a);$$

(X_a, d_a) en (X_b, d_b) zijn H-equivalent.

Stelling 20: *Zij* (X, d) *een metrische ruimte,* $A \subset X$, $\bar{A}$ = *afsluiting van* A*, dan is*

$$d_G\Big[(A, d), (\bar{A}, d)\Big] = 0.$$

Bewijs: Neem $\epsilon \geq 0$ willekeurig. We tonen aan dat er een 2ϵ-approximatie bestaat tussen (A,d) en $(\bar{A},d)$.

Daartoe konstrueren we een relatie $R \subseteq \bar{A} \times A$ met $p_{r_1}R = \bar{A}$ en $p_{r_2}R = A$:

$$R = \{(x,x)|x \in A\} \cup \Big\{(x,y)|x \in \bar{A} - A \text{ en } y \in B_\epsilon(x) \cap A\Big\}$$

Merk op: $B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$, want $x \in \bar{A} - A$, dus x is limietpunt en de open bol met straal ϵ en middelpunt x heeft minstens één punt gemeen met A.

We zien nu dat:

$$xRx' \text{ en } yRy' \Longrightarrow |d(x,y) - d(x',y')| \leq 2\epsilon; \qquad (1)$$

dit geldt voor iedere $\epsilon > 0$, dus

$$d_G\Big[(A,d),(\bar{A},d)\Big] = 0.$$

Dat (1) inderdaad geldt kan ingezien worden als volgt:

Stel:

$$\begin{array}{lccc} x_1 R x_1 & x_1 & \in & A \\ x_2 R x_2 & x_2 & \in & A \end{array}$$

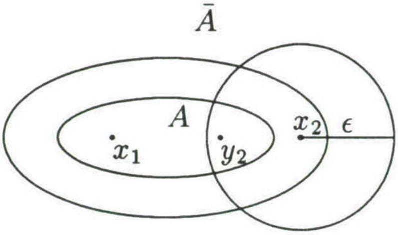
Dan is het triviaal dat:

$$|d(x_1,x_2) - d(x_1,x_2)| \leq 2\epsilon$$

voor iedere $\epsilon > 0$.

Stel: $x_1 R x_1 \qquad x_1 \in A$

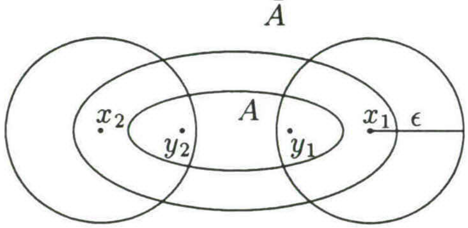
$x_2 R y_2 \qquad x_2 \in \bar{A} - A$ en $y_2 \in B_\epsilon(x_2) \cap A$



dus: $|d(x_1, x_2) - d(x_1, y_2)| \leq 2\epsilon$.

Stel: $x_1 R y_1 \qquad x_1 \in \bar{A} - A \qquad y_1 \in B_\epsilon(x_1) \cap A$

$x_2 R y_2 \qquad x_2 \in \bar{A} - A \qquad y_2 \in B_\epsilon(x_2) \cap A$



Dan m.b.v. de driehoeksongelijkheid: $|d(x_1, x_2) - d(y_1, y_2)| \leq 2\epsilon$. $\square$

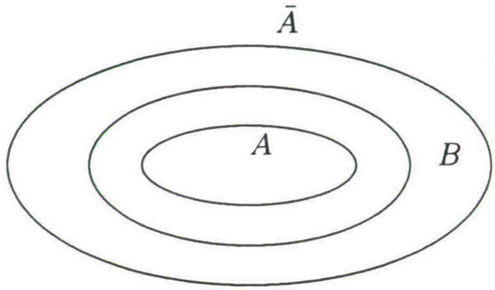
Deze stelling kan als volgt gegeneraliseerd worden:

Stelling 21: *Zij (X, d) een metrische ruimte. Zij $A \subset B \subseteq X$, dan*

$$B \subseteq \bar{A} \Longrightarrow d_G\left[(A, d), (B, d)\right] = 0.$$

Bewijs : Stel $A \subset B \subseteq X$, (X,d) een metrische ruimte, $B \subseteq \bar{A}$. Neem $\epsilon \geq 0$ willekeurig. We tonen aan dat er een 2ϵ-approximatie is tussen (A,d) en (B,d). We construeren daartoe een relatie $R \subseteq B \times A$ met $p_{r_1} R = B$ en $p_{r_2} R = A$.

$$R = \{(x,x) | x \in A\} \cup \{(x,y) | x \in B - A \text{ en } y \in B_\epsilon(x) \cap A\}$$



$B - A$ bevat enkel limietpunten uit A, want : $B - A \subseteq \bar{A} - A$.

Stel dat $x \in B - A$, x is dan een limietpunt en $B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$.

We zien nu dat

$$xRx' \text{ en } yRy' \Longrightarrow |d(x,y) - d(x',y')| \leq 2\epsilon$$

Dit geldt voor iedere $\epsilon > 0$, dus $d_G[(A,d),(B,d)] = 0$. □

Het omgekeerde van deze stelling, nl. : Zij (X,d) een metrische ruimte. Zij $A \subset B \subseteq X$, dan

$$d_G[(A,d),(B,d)] = 0 \Longrightarrow B \subseteq \bar{A}$$

geldt niet.

Tegenvoorbeeld:

$$\begin{aligned} X &= \mathbb{R} \qquad \mathrm{d} = \text{ absolute waarde metriek} \\ A &= (0,\infty) \\ B &= (-1,\infty) \end{aligned}$$

$d_G\left[(A,|\quad|),(B,|\quad|)\right]=0$ want A en B zijn isometrisch. Maar

$$B \not\subseteq \bar{A} = [0,\infty).$$

Uit Stelling 21 volgt nu:

Stelling 22: $d_G\left[(Q^n,d),(\mathbb{R}^n,\mathrm{d})\right]=0.$

Bewijs:

Volgt onmiddellijk uit Stelling 21 met $A = Q^n$ en $B = X = \mathbb{R}^n$. $\square$

Stelling 23: *Zij (X,d) een compacte metrische ruimte dan geldt: Voor iedere $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ bestaat er een eindige metrische ruimte $(X',d), X' \subset X$ zó dat*

$$d_G\left[(X,d),(X',d)\right] \leq \epsilon.$$

Bewijs: Stel (X,d) is een compacte metrische ruimte. Beschouw $\{B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)|x\in X\}$, waarbij $B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) = \{y\in X|d(y,x)<\frac{\epsilon}{2}\}$.

Dit is een open bedekking van X.

Aangezien (X, d) compact is, bevat deze open bedekking een *eindige* deelbedekking

$$B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_1), B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_2), \ldots, B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_n)$$

Neem voor $X' = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$.

We tonen aan dat $d_G\left[(X', d), (X, d)\right] \leq \epsilon$.

Neem $R \subset X \times X'$ als volgt:

$(x, x_i) \in R \Longleftrightarrow x \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)$.

Dan is $p_{r_1} R = X$

$\qquad p_{r_2} R = X'$

Inderdaad:

$p_{r_1} R = X$, want: $\forall x \in X \quad \exists x_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}[x \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)]$.

$p_{r_2} R = X' \qquad \forall x_i \in X'[(x_i, x_i) \in R]$ en dus $x_i \in p_{r_2} R$ voor elke $x_i \in X'$.

We gaan nu aantonen dat als $x \in X$, $y \in X$, $x_i \in X'$, $x_j \in X'$ en $(x, x_i) \in R$, $(y, x_j) \in R$, geldt dat

$$|d(x, y) - d(x_i, x_j)| \leq \epsilon.$$

Wanneer we dit aangetoond hebben, hebben we bewezen dat R een ϵ-approximatie is en dus

$$d_G[(X, d), (X', d)] \leq \epsilon.$$

Uit de driehoeksongelijkheid volgt:

$$d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, y)$$

en ook

$$d(x_i, y) \leq d(x_i, x_j) + d(x_j, y).$$

Waaruit :

$$d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y).$$

Nu is $d(x, x_i) \leq \frac{\epsilon}{2}$

$d(x_j, y) \leq \frac{\epsilon}{2}$

Waaruit

$$d(x, y) \leq d(x_i, x_j) + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

of

$$d(x, y) - d(x_i, x_j) \leq \epsilon$$

Analoog :

$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x) + d(x, x_j)$

$d(x, x_j) \leq d(x, y) + d(y, x_j)$

dus

$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x) + d(x, y) + d(y, x_j)$

dus

$d(x_i, x_j) \leq d(x, y) + \epsilon$

$d(x_i, x_j) - d(x, y) \leq \epsilon.$

Waaruit : $|d(x, y) - d(x_i, x_j)| \leq \epsilon.$ $\square$

De volgende bewering lijkt op het eerste gezicht evident.

Vermeende stelling 24 : *Als $X' \subset X'' \subset X$, dan geldt dat*

$$d_G[X, X''] \leq d_G[X, X'].$$

Voor eindige X hebben we echter volgend tegenvoorbeeld :*

$X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$

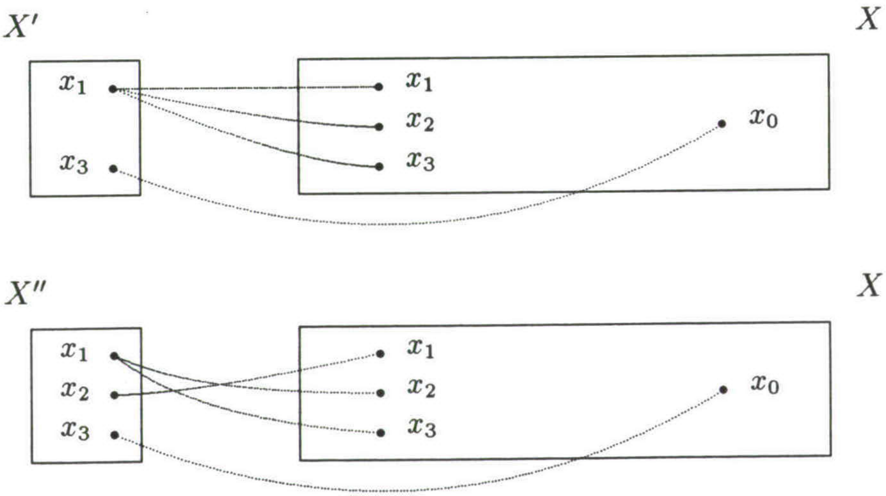
$d(x_1, x_2) = d(x_2, x_3) = 1$

$d(x_1, x_3) = 2$

$d(x_0, x_i) = 100 \qquad i = 1, 2, 3$

Neem $X' = \{x_1, x_3\}$ en $X'' = \{x_1, x_2, x_3\}$,

dan $d_G[X, X'] = 98$, terwijl $d_G[X, X''] = 99$.



Stelling 25 : *Zij (X, d_1) en (Y, d_2) metrische ruimten. X en Y hebben*

---

*Frédéric Paulin, persoonlijke mededeling, 1990.

eindige diameter.[†] *Dan is*

$$d_G\left[(X,d_1),(Y,d_2)\right] \le \varnothing X + \varnothing Y.$$

Bewijs : Zij $R = X \times Y$.

$$\begin{aligned} x_1 R y_1 \text{ en } x_2 R y_2 \quad \Rightarrow \quad & |d_1(x_1,x_2) - d_2(y_1,y_2)| \\ & \le d_1(x_1,x_2) + d_2(y_1,y_2) \le \varnothing X + \varnothing Y \end{aligned}$$

□

Stelling 26 : *Zij (A,d_1) en (B,d_2) compacte metrische ruimten, dan geldt dat*

$$d_G\left[(A,d_1),(B,d_2)\right] \ge \varnothing(A) - \varnothing(B).$$

Bewijs : Stel (A,d_1) en (B,d_2) zijn compacte metrische ruimten en R is een ϵ-approximatie.

Er zijn $x,y \in A$ met $d_1(x,y) = \varnothing(A)$.

Er zijn $x', y' \in B$ met xRx' en yRy'.

Dan

$$|d_1(x,y) - d_2(x',y')| \le \epsilon,$$

en ook

$$d_1(x,y) - d_2(x',y') \le \epsilon.$$

[†]Notatie : $\varnothing X < \infty$, $\varnothing Y < \infty$.

Nu is $d_1(x, y) = \varnothing(A)$ en $d_2(x', y') \leq \varnothing(B)$.

Dus $\varnothing(A) - \varnothing(B) \leq \epsilon$.

Dus $d_G\left[(A, d_1), (B, d_2)\right] \geq \varnothing(A) - \varnothing(B)$. $\square$

Stelling 27 : *Zijn* (X_1, d_1) *en* (X_2, d_2) *metrische ruimten, dan*

$$d_G\left[(X_1, d_1), (X_2, d_2)\right] \leq \max\left\{\varnothing(X_1), \varnothing(X_2)\right\}.$$

Bewijs : Zij $\mu = \max\left\{\varnothing(X_1), \varnothing(X_2)\right\}$. Voor iedere relatie

$$R \subseteq X_1 \times X_2$$

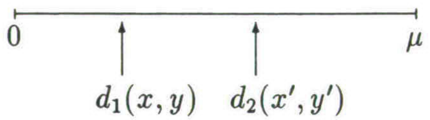
waarvoor $p_{r_1} R = X_1$ en $p_{r_2} R = X_2$ geldt :

$$x R x' \text{ en } y R y' \Rightarrow |d_1(x, y) - d_2(x', y')| \leq \mu.$$

Want :

$0 \leq d_1(x, y) \leq \varnothing(X_1) \leq \mu$.

$0 \leq d_2(x', y') \leq \varnothing(X_2) \leq \mu$.



Er is dus een μ-approximatie, dus

$$d_G\left[(X_1, d_1), (X_2, d_2)\right] \leq \mu = \max\{\varnothing X_1, \varnothing X_2\}.$$

Daaruit volgt dat

$$d_G\left[(X_1, d_1), (X_2, d_2)\right] = \varnothing X_1 + \varnothing X_2 \Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \varnothing X_1 &= 0 \quad \text{of} \quad \varnothing X_2 = 0 \\ \text{of } \varnothing X_1 &= \infty \quad \text{of} \quad \varnothing X_2 = \infty \end{aligned}$$

$\square$

Hoofdstuk 4

Gromov afstanden tussen eindige metrische ruimten. Matrix notatie voor eindige metrische ruimten.

Voor eindige verzamelingen X en Y noteren we een relatie $R \subset X \times Y$ als volgt in de vorm van een $n \times m$ matrix.

$$\begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & & y_m \\ \hline x_1 & r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ x_2 & r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \vdots & & & & \\ x_n & r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nm} \end{array}$$

waarbij

$$r_{ij} = 1 \iff (x_i, y_j) \in R$$
$$r_{ij} = 0 \iff (x_i, y_j) \notin R.$$

$p_{r_1} R = X$ betekent: in iedere rij staat minstens één 1.

$p_{r_2} R = Y$ betekent: in iedere kolom staat minstens één 1.

We zoeken een algoritme om de Gromov afstand te berekenen tussen eindige quasi-metrische ruimten.

Zij (X, d_1) en (Y, d_2) twee *eindige* quasi-metrische ruimten.

Zij $|X| = n$ en $|Y| = m$.

We zoeken het aantal binaire relaties R tussen X en Y waarvoor geldt dat $p_{r_1}R = X$ en $p_{r_2}R = Y$. We gaan te werk in een aantal stappen.

• We bepalen het aantal binaire relaties over $X \times Y$ met $|X| = n$ en $|Y| = m$ (onder voorwaarde $p_{r_1}R = X$). De tweede voorwaarde $p_{r_2}R = Y$ laten we voorlopig achterwege.

Uit elk punt $x \in X$ mag een willekeurig aantal pijlen vertrekken verschillend van 0. Aangezien $|Y| = m$, zijn er m pijlen mogelijk vanuit iedere $x \in X$.

Iedere deelverzameling van Y komt in aanmerking, met uitzondering van $\emptyset$. Dit levert ons $2^m - 1$ mogelijkheden. Dit geldt voor ieder van de n punten van X. Er zijn dus $(2^m - 1)^n$ binaire relaties over $X \times Y$ mogelijk, met $|X| = n$, $|Y| = m$ en met $p_{r_1}R = X$.

• We houden ook rekening met de 2$^{\text{de}}$ voorwaarde $p_{r_2}R = Y$. Noemen we het aantal binaire relaties over $X \times Y$ waarvoor geldt dat $p_{r_1}R = X$ en $p_{r_2}R = Y$ $\quad N(n, m)$.

• We zoeken een recursieve formule om $N(n, m)$ te bepalen.

Stel $p_{r_2}R = A \subseteq Y$ met $|A| = r \leq m$, dan is het aantal $R \subseteq X \times Y$ met $p_{r_1}R = X$ en $p_{r_2}R = A$ gelijk aan $N(n, r)$.

Het aantal dergelijke deelverzamelingen A is gelijk aan

$$\binom{m}{r} = \frac{m!}{r!(m-r)!}$$

We verkrijgen de volgende recursieve formule.

$$\begin{aligned}(2^m-1)^n &= \binom{m}{1}N(n,1)+\binom{m}{2}N(n,2)+\binom{m}{3}N(n,3)+\cdots\\ &\quad \cdots+\binom{m}{m-1}N(n,m-1)+\binom{m}{m}N(n,m)\end{aligned}$$

Of:

$$\begin{aligned}
m &= 1 & 1^n &= N(n,1)\\
m &= 2 & 3^n &= 2N(n,1)+N(n,2)\\
m &= 3 & 7^n &= 3N(n,1)+3N(n,2)+N(n,3)\\
&& &\vdots\\
m &= m & (2^m-1)^n &= \tbinom{m}{1}N(n,1)+\tbinom{m}{2}N(n,2)+\cdots\\
&& &\quad\cdots+\tbinom{m}{m-1}N(n,m-1)+\tbinom{m}{m}N(n,m)
\end{aligned}$$

Dit levert ons een stelsel op van m vergelijkingen met m onbekenden: $N(n,1), N(n,2), N(n,3), \ldots, N(n,m-1), N(n,m)$.

Volgens de regel van Cramer volgt dat

$$N(n,m) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1^n \\ 2 & 1 & 0 & & 3^n \\ 3 & \binom{3}{2} & 1 & & 7^n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ m & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & & (2^m-1)^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & & \vdots \\ 3 & \binom{3}{2} & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ m & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & & 1 \end{vmatrix}}$$

waarbij $|M|$ de determinant van de matrix M is. De noemer $= 1$.

We willen een algoritme ontwikkelen dat ons toelaat de Gromov afstand te berekenen tussen eindige metrieken.

We hebben $N(n,m)$ relaties R die voldoen aan

$$p_{r_1}R = X \text{ en } p_{r_2}R = Y.$$

Om niet alle relaties te moeten onderzoeken bewijzen we de volgende stelling.

Stelling 28 : *Zij (X, d_1) en (Y, d_2) metrische ruimten. Neem $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Zij R een ϵ-approximatie. Stel dat $S \subset R$ met $p_{r_1}S = X$, $p_{r_2}S = Y$, dan is S ook een ϵ-approximatie.*

Bewijs : Zij R een ϵ-approximatie. Dan hebben we voor ieder paar $(x_1, x_2) \in R$ en ieder paar $(y_1, y_2) \in R$

$$|d_1(x_1, y_1) - d_2(x_2, y_2)| \leq \epsilon$$

en dus ook $|d_1(x_1^*, y_1^*) - d_2(x_2^*, y_2^*)| \leq \epsilon$ voor alle $(x_1^*, x_2^*) \in S$ en $(y_1^*, y_2^*) \in S$. □

Definitie 24 : *Zij (X, d_1) en (Y, d_2) twee quasi-metrische ruimten. Veronderstel $|X| = n$ en $|Y| = m$. Bij $x \in X$ kiezen we één $x^* \in Y$, en bij $y \in Y$ kiezen we één $y_* \in X$. Aldus bekomen we*

$$S = \{(x_1, x_1^*), (x_2, x_2^*), \ldots, (x_n, x_n^*), (y_{1*}, y_1), (y_{2*}, y_2), \ldots, (y_{m*}, y_m)\}.$$

Zulke relaties noemen de basisrelaties tussen (X, d_1) en (Y, d_2).

Dan is $|S| \leq n + m$.

Het ongelijkheidsteken volgt uit het feit dat sommige (x_i, x_i^*) en (y_{j*}, y_j) gelijk kunnen zijn.

Hoeveel dergelijke S-en zijn er ?

Elke S behoort bij een tweetal f, g waar $f : X \to Y$ en $g : Y \to X$.

Het aantal $f : X \to Y$ is m^n.

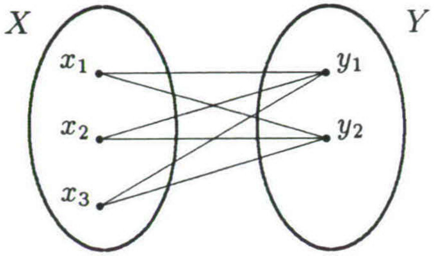
Het aantal $f : Y \to X$ is n^m.

Het aantal S-en is dus hoogstens $m^n.n^m$.

Stelling 28 is van belang in verband met het uitrekenen van de Gromov-afstand tussen eindige metrische ruimten.

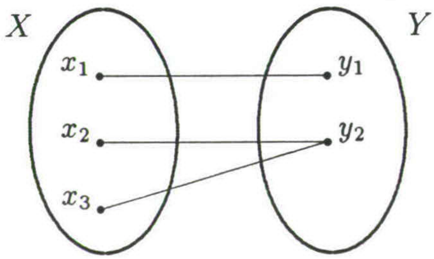
Voorbeeld 5 : : $\quad X = \{x_1, x_2, x_3\} \quad Y = \{y_1, y_2\}$

Beschouwen we volgende relatie R.



De relatie matrix is dan: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Indien R een ϵ-approximatie is, dan is de volgende $S \subset R$ ook een ϵ-approximatie.



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

We gebruiken de functie notatie. Indien $x_1 S y_1$ schrijven we $S(x_1)$ voor y_1.

Dan is

$$\sup \{|d_1(x_1, x_2) - d_2(y_1, y_2)|, \quad |d_1(x_1, x_3) - d_2(y_1, y_2)|, \quad |d_1(x_2, x_3) - d_2(y_2, y_2)|\}$$

een ϵ horende bij een ϵ-approximatie. In functienotatie:

$$\epsilon_S = \sup_{i \neq j} \{|d_1(x_i, x_j) - d_2(S(x_i), S(x_j))|\}$$

Zij $S_1, S_2, \ldots, S_{2^3.3^2}$ de basisrelaties, dan is

$$d_G[(X, d_1), (Y, d_2)] = \inf \left\{\epsilon_{S_1}, \epsilon_{S_2}, \ldots, \epsilon_{S_{2^3.3^2}}\right\}.$$

Algemeen: Zij (X, d_1), (Y, d_2) eindige metrische ruimten. Zij $|X| = n$, $|Y| = m$.

Stel dat $n > m$.

We schrijven de rij basisrelaties

$$S_1, S_2, \ldots, S_{m^n.n^m}$$

Voor iedere S_k bepalen we

$$\epsilon_{S_k} = \sup_{i \neq j} \{|d_1(x_i, x_j) - d_2(S_k(x_i), S_k(x_j))|\}.$$

Dan is

$$d_G[(X, d_1), (Y, d_2)] = \inf \{\epsilon_{S_1}, \epsilon_{S_2}, \ldots, \epsilon_{S_{m^n.n^m}}\}.$$

Hoofdstuk 5

Berekenen van Gromov afstanden

Voorbeeld 6 :

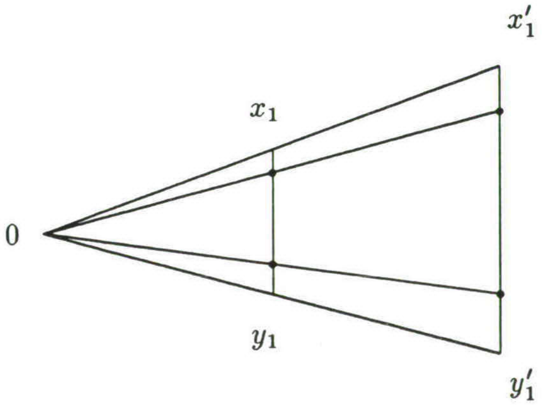
$$X_1 = \textit{lijnstuk } x_1 y_1 \textit{ met lengte } a$$

$$X_2 = \textit{lijnstuk } x_1' y_1' \textit{ met lengte } b$$

We veronderstellen $a < b$.

We bepalen $d_G[(X_1, |\ \ |), (X_2, |\ \ |)]$.

Figuur 1: Projectie vanuit O



Er is een R, $p_{r_1} R = X_1$, $p_{r_2} R = X_2$ met

$$xRx' \text{ en } yRy' \Rightarrow \Big||x-y| - |x'-y'|\Big| \leq b - a.$$

Deze R wordt bekomen door de projectie vanuit O (zie fig. 1).

Daaruit volgt: $d_G[(X_1, |\quad|), (X_2, |\quad|)] \leq b - a.$ (1)

Stel we hebben een willekeurige S_ϵ die voldoet aan $p_{r_1} R = X_1$ en $p_{r_2} R = X_2$ waarvoor geldt dat:

$$xS_\epsilon x' \text{ en } yS_\epsilon y' \Rightarrow \Big||x-y| - |x'-y'|\Big| \leq \epsilon.$$

We tonen aan dat $\epsilon \geq b - a$.

Neem $x' = x_1'$ en $y' = y_1'$. Daarbij horen x en y zó dat

$$xS_\epsilon x_1' \text{ en } yS_\epsilon y_1' \Rightarrow \Big||x-y| - |x_1'-y_1'|\Big| \leq \epsilon.$$

Dan is $\Big||x-y| - b\Big| \leq \epsilon$. Aangezien $|x-y| \leq a$ is $\epsilon \geq b - a$.

We weten reeds dat $d_G[(X_1, |\quad|), (X_2, |\quad|)] \leq b - a$.

Dus $d_G[(X_1, |\quad|), (X_2, |\quad|)] = b - a$.

Voorbeeld 7:

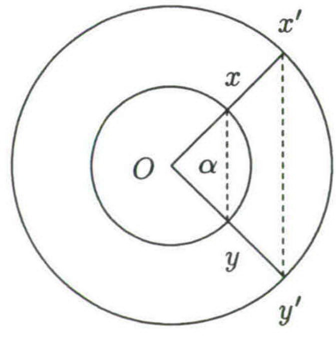
Zij X_1 cirkelomtrek met straal R_1.

Zij X_2 cirkelomtrek met straal R_2.

$R_2 > R_1$.

We bepalen $d_G[(X_1, |\quad|), (X_2, |\quad|)]$.

$|x' - y'| = 2R_2 \sin \frac{\alpha}{2}$.



Figuur 2: Voorbeeld 7

$|x-y| = 2R_1 \sin\frac{\alpha}{2}$.

Er is een relatie R met

$$xRx' \text{ en } yRy' \Rightarrow \Big||x-y| - |x'-y'|\Big| \leq 2R_2 - 2R_1.$$

Inderdaad: Met ieder punt van X_1 brengen we een punt van X_2 in relatie zoals aangeduid op figuur 2.

$$\begin{aligned} xRx' \text{ en } yRy' \Rightarrow \Big||x-y| - |x'-y'|\Big| &= |2R_1 \sin\frac{\alpha}{2} - 2R_2 \sin\frac{\alpha}{2}| \\ &= 2(R_2 - R_1)\sin\frac{\alpha}{2} \leq 2R_2 - 2R_1. \end{aligned}$$

Daaruit volgt: $d_G[(X_1, |\quad|), (X_2, |\quad|)] \leq 2R_2 - 2R_1$.

Zij S_ϵ een willekeurige relatie tussen X_1 en X_2, die voldoet aan $p_{r_1} S_\epsilon = X_1$ en $p_{r_2} S_\epsilon = X_2$, zó dat

$$xS_\epsilon x' \text{ en } yS_\epsilon y' \Rightarrow \Big||x-y| - |x'-y'|\Big| \leq \epsilon.$$

Neem x' en y' zó dat $x' - y' = 2R_2$. Bij x' en y' behoren x en y met $xS_\epsilon x'$ en $yS_\epsilon y'$, dan geldt dat:

$$\Big||x-y| - |x'-y'|\Big| \leq \epsilon$$

en dus

$$\Big||x-y| - 2R_2\Big| \leq \epsilon.$$

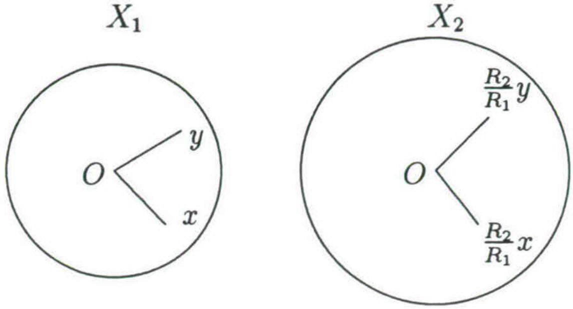
Aangezien $|x-y| \leq 2R_1$ is $\epsilon \geq 2R_2 - 2R_1$.

We weten reeds dat $d_G[(X_1, |\quad|), (X_2, |\quad|)] \leq 2R_2 - 2R_1$.

Dus $d_G[(X_1, |\quad|), (X_2, |\quad|)] = 2R_2 - 2R_1$.

Gromov afstand tussen twee cirkelschijven.

Voorbeeld 8 :



Zij X_1 cirkelschijf met straal R_1.

Zij X_2 cirkelschijf met straal R_2 en $R_2 > R_1$.

We zoeken $d_G[(X_1, |\quad|), (X_2, |\quad|)]$.

We beschouwen de volgende relatie R:

$$X_1 \ni x \longmapsto \frac{R_2}{R_1}x.$$

Deze relatie is bijectief.

We gebruiken de vectornotatie.

Zij $\begin{array}{ccc} \bar{x} & \in & X_1 \\ \bar{y} & \in & X_1 \end{array}$ en $\begin{array}{c} \bar{x}' \in X_2 \\ \bar{y}' \in X_2 \end{array}$; dan volgt :

$$\bar{x}R\bar{x}' \text{ en } \bar{y}R\bar{y}' \Rightarrow \Big||\bar{x}-\bar{y}| - |\frac{R_2}{R_1}\bar{x} - \frac{R_2}{R_1}\bar{y}|\Big| = |\bar{x}-\bar{y}|\ |1 - \frac{R_2}{R_1}|.$$

Nu is $\max\{|\bar{x}-\bar{y}|\} = 2R_1$; dus :

$\Big||\bar{x}-\bar{y}| - |\frac{R_2}{R_1}\bar{x} - \frac{R_2}{R_1}\bar{y}|\Big| \leq 2R_1|1 - \frac{R_2}{R_1}| = |2R_1 - 2R_2|.$

R is een $|2R_1 - 2R_2|$ approximatie, dus

$$d_G[(X_1, |\quad|), (X_2, |\quad|)] \le |2R_1 - 2R_2|.$$

Zij S_ϵ een willekeurige ϵ-approximatie tussen $(X_1, |\quad|)$ en $(X_2, |\quad|)$. We tonen aan dat $\epsilon \ge |2R_1 - 2R_2|$.

Als $\begin{array}{ccc} \bar{x} & \in & X_1 \\ \bar{y} & \in & X_1 \end{array}$ en $\begin{array}{ccc} \bar{x}' & \in & X_2 \\ \bar{y}' & \in & X_2 \end{array}$, dan hebben we:

$$\bar{x} S_\epsilon \bar{x}' \text{ en } \bar{y} S_\epsilon \bar{y}' \Rightarrow \Big| |\bar{x} - \bar{y}| - |\bar{x}' - \bar{y}'| \Big| \le \epsilon.$$

Neem voor $\bar{x}'$ en $\bar{y}'$ diametraal tegenovergestelde punten, dus

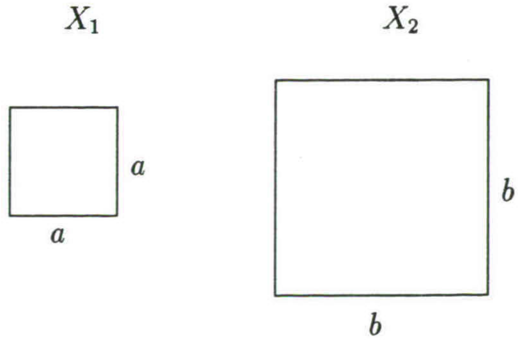
$$|\bar{x}' - \bar{y}'| = 2R_2.$$

Met $\bar{x}'$ en $\bar{y}'$ corresponderen vectoren $\bar{x}$ en $\bar{y}$ in X, zó dat

$$\bar{x} S_\epsilon \bar{x}' \text{ en } \bar{y} S_\epsilon \bar{y}'$$

en dus $\Big| |\bar{x} - \bar{y}| - 2R_2 \Big| \le \epsilon$. Nu is $|\bar{x} - \bar{y}| \le 2R_1$ dus $\epsilon \ge |2R_1 - 2R_2|$ dus $d_G[(X_1, |\quad|), (X_2, |\quad|)] = |2R_1 - 2R_2|$. Dit komt overeen met onze intuïtie.

Voorbeeld 9: *We berekenen de Gromov-afstand tussen een vierkant met zijde a en een vierkant met zijde b.*



$$d = \text{Absolute waarde metriek in } \mathbb{R}^2$$

We maken de volgende relatie R:

$$X_1 \ni (x_1, x_2) \overset{R}{\mapsto} (\tfrac{b}{a}x_1\,, \tfrac{b}{a}x_2).$$

We beweren dat R een $a\sqrt{2}\,|1-\frac{b}{a}|$-approximatie is. Inderdaad:

$$\left|\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}-\sqrt{(\tfrac{b}{a}x_1-\tfrac{b}{a}y_1)^2+(\tfrac{b}{a}x_2-\tfrac{b}{a}y_2)^2}\right| =$$
$$= \left|\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}-\tfrac{b}{a}\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\right| =$$
$$= \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\,|1-\tfrac{b}{a}|$$

Nu is

$$\sup_{\substack{(x_1,x_2)\in X_1\\(y_1,y_2)\in X_1}} \left\{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\,|1-\tfrac{b}{a}|\right\} = a\sqrt{2}\,|1-\tfrac{b}{a}|,$$

dus $d_G[(X_1,|\quad|),(X_2,|\quad|)] \leq a\sqrt{2}\,|1-\frac{b}{a}|$.

Bewering: $d_G[(X_1,|\quad|),(X_2,|\quad|)] = a\sqrt{2}\,|1-\frac{b}{a}|$.

We tonen dit laatste aan:

Stel S_ϵ is een willekeurige relatie tussen X_1 en X_2, waarvoor geldt: $p_{r_1}S_\epsilon = X_1$ en $p_{r_2}S_\epsilon = X_2$, en als

$$\begin{array}{ccc} (x_1,x_2) & S_\epsilon & (x_1',x_2') \\ (y_1,y_2) & S_\epsilon & (y_1',y_2'), \end{array}$$

dan $\left|\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}-\sqrt{(x_1'-y_1')^2+(x_2'-y_2')^2}\right| \leq \epsilon$.

Neem $(x_1', x_2') = (0,0)$, en

$$(y_1', y_2') = (b, b)$$

Dan is $\sqrt{(x_1' - y_1')^2 + (x_2' - y_2')^2} = b\sqrt{2} = \varnothing X_2$.

Met $(0,0)$ en (b,b) corresponderen twee punten uit X_1, zeg (x_1, x_2) en (y_1, y_2) zó dat

$$\left|\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} - b\sqrt{2}\right| \leq \epsilon.$$

Maar

$$\sup_{\substack{(x_1,x_2)\in X_1 \\ (y_1,y_2)\in X_1}} \left\{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\right\} = a\sqrt{2}.$$

Dus $\epsilon \geq \left|a\sqrt{2} - b\sqrt{2}\right| = a\sqrt{2}\,|1 - \frac{b}{a}|$.

Samen met

$$d_G\left[(X_1, |\quad|), (X_2, |\quad|)\right] \leq a\sqrt{2}\,|1 - \frac{b}{a}|$$

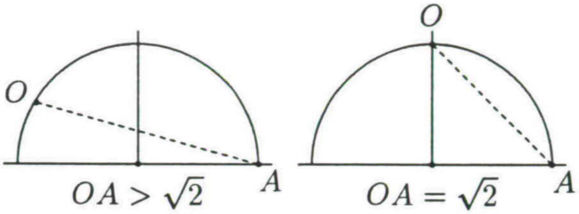
geeft dit

$$d_G\left[(X_1, |\quad|), (X_2, |\quad|)\right] = a\sqrt{2}\,|1 - \frac{b}{a}|.$$

Voorbeeld 10: *We berekenen de Gromov-afstand tussen het gesloten segment $[-1,1]$ en de halve cirkel $y = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1,1]$ en tonen aan dat deze de waarde $\sqrt{2} - 1$ heeft.*

Laat $\epsilon_0 = \sqrt{2} - 1$.

(I) Stel, we hebben een ϵ-approximatie R. Zij O een punt op de halve cirkelboog dat correspondeert met $o \in [-1,1]$. Zij A een eindpunt van de cirkelboog met $\|A - O\| \geq \sqrt{2}$.



Zij a een punt van $[-1, 1]$ dat correspondeert met A.

Dan is $\epsilon \geq \Big| |a-o| - \|A-O\| \Big| = \Big| |a| - \|A-O\| \Big|$. Omdat $\|A-O\| \geq \sqrt{2}$ en $|a| \leq 1$ moet $\epsilon \geq \sqrt{2} - 1$, dus $\epsilon \geq \epsilon_0$.

Daaruit volgt : voor elke ϵ-approximatie geldt $\epsilon \geq \epsilon_0$.

(II) We maken een ϵ_0-approximatie.

Zij

$f : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to [-1, 1]$ gedefinieerd door $f(x) = \sqrt{2}\, \sin x$

$g : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to$ cirkelboog, gedefinieerd door $g(x) = \begin{pmatrix} \sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix}$.

Dan is $gf^{-1} : [-1, 1] \to$ cirkelboog een bijectie.

We tonen aan dat dit een ϵ_0-approximatie is. Het volstaat daartoe aan te tonen dat voor alle $x, y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$,

$$\left| |\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \sin y| - \left\| \begin{pmatrix} \sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin 2y \\ \cos 2y \end{pmatrix} \right\| \right| \leq \epsilon_0,$$

hetgeen na enige herleiding neerkomt op

$$\Big| \sqrt{2} | \sin x - \sin y| - 2|sin(x-y)| \Big| \leq \epsilon_0.$$

We moeten dus aantonen dat

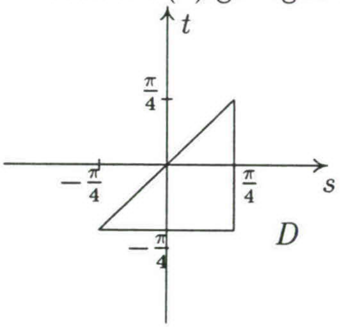
$$\left|\sqrt{2}|\sin x - \sin y| - 2|sin(x-y)|\right| \le \epsilon_0 \quad \text{zodra } x, y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Noemen we het grootste van de getallen x en y even s en het kleinste t, dan $|\sin x - \sin y| = \sin s - \sin t$ en $|\sin(x-y)| = \sin(s-t)$.

We zijn dus klaar als $|\sqrt{2}(\sin s - \sin t) - 2\sin(s-t)| \le \epsilon_0$ (*)

voor alle $s, t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ met $s \ge t$.

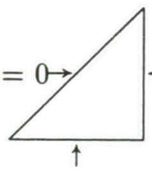
Dus als (*) geldig is voor alle paren (s,t) in de driehoek D:



Laat $F(s,t) = \sqrt{2}(\sin s - \sin t) - 2\sin(s-t), \quad (s,t) \in D$.

We zoeken de grootste en de kleinste waarden van F op D. We zien nu

$F(s,t) = 0$



$F(s,t) = F(\frac{\pi}{4}, t) = 1 - \sqrt{2}\cos t$

$F(s,t) = F(s, -\frac{\pi}{4}) = 1 - \sqrt{2}\cos s$

Omdat $s, t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ behoren $\cos s$ en $\cos t$ tot $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$; bijgevolg

$$1 - \sqrt{2} \leq F(s,t) \leq 0$$

overal op de rand van D.

Als F een maximum of een minimum bereikt in een inwendig punt (s_0, t_0) van D, dan moet

$$\begin{aligned}
0 = \left(\frac{\partial}{\partial s} F(s,t)\right)_{\substack{s=s_0 \\ t=t_0}} &= \sqrt{2}\cos s_0 - 2\cos(s_0 - t_0) \qquad * \\
0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} F(s,t)\right)_{\substack{s=s_0 \\ t=t_0}} &= -\sqrt{2}\cos t_0 + 2\cos(s_0 - t_0)
\end{aligned}$$

Hieruit volgt : $\cos s_0 = \cos t_0$. Maar s_0 en t_0 liggen in $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ en $s_0 \neq t_0$, want (s_0, t_0) is een inwendig punt van D. Dus $s_0 = -t_0$. Substitueren in (*) geeft ons:

$$4\cos^2 s_0 - \sqrt{2}\cos s_0 - 2 = 0$$

waarvan de wortels $\cos s_0 = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4\sqrt{2}}$ zijn.

Aangezien $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos s_0 \leq 1$ bekomen we dat $\cos s_0 = \frac{1+\sqrt{17}}{4\sqrt{2}}$.

We bekomen nu:

$$F(s_0, t_0) = F(s_0, -s_0) = 2\sqrt{2}\sin s_0 - 2\sin 2s_0 = 4\sin s_0 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos s_0\right).$$

Substitueren we nu de waarde van $\cos s_0 = \frac{1+\sqrt{17}}{4\sqrt{2}}$ dan bekomen we dat $F(s_0, t_0) = \pm\sqrt{\frac{71 - 17\sqrt{17}}{8}}$ en $-\epsilon_0 < F(s_0, t_0) < \epsilon_0$.

Het maximum en minimum van F liggen tussen $-\epsilon_0$ en ϵ_0. Dus $|F(s,t)| \leq \epsilon_0$ overal op D. $\square$

Voorbeeld 11 : $X_1 = \mathbb{N}, \mathrm{X}_2 = \mathrm{P_r}$ = *verzameling van alle priemgetallen. Zij* $d_1 = d_2 = Aw$ *(absolute waarde) metriek. We tonen aan dat*

$$d_G[(\mathbb{N}, |\quad|), (\mathrm{P_r}, |\quad|)] = +\infty.$$

Bewijs :

Lemma 3 (A. Uytterhoeven) : *Zij* $n \in \mathbb{N}, \mathrm{n} > 1$ *dan is* $n! + 2, n! + 3, \ldots, n! + n$ *een rij van* $n - 1$ *op elkaar volgende natuurlijke getallen waarvan geen enkel een priemgetal is.*

Triviaal $n! + 2$ is deelbaar door 2, $n! + 3$ is deelbaar door 3, etc. $\square$

Hieruit volgt dat voor willekeurig grote $K \in \mathbb{N}$ er steeds twee priemgetallen M en N bestaan, $M < N$, zó dat $N - M \geq K$ en tussen M en N geen priemgetallen liggen.

Stel M en N zijn oneven priemgetallen, $M < N$, tussen M en N geen priemgetallen. We tonen aan dat

$$d_G[(\mathbb{N}, |\quad|), (\mathrm{P_r}, |\quad|)] \geq \frac{\mathrm{N} - \mathrm{M}}{20}.$$

Bewijs : Stel $d_G[(\mathbb{N}, |\quad|), (\mathrm{P_r}, |\quad|)] < \frac{\mathrm{N-M}}{20}$. Dan is er een relatie

$$R \subseteq \mathbb{N} \times \mathrm{P_r}$$

met xRx' en $yRy' \Rightarrow \Big||x-y|-|x'-y'|\Big| < \frac{N-M}{20}$. (*)

Er zijn x en y met xRM en yRN. Stel $x<y$, dan volgt:

$\Big||x-y|-|M-N|\Big| < \frac{N-M}{20}$.

(Als $x=y$, dan $|M-N| > \frac{N-M}{20} \Rightarrow$ tegenspraak met (*).)

$$|M-N| - \tfrac{N-M}{20} < \ |x-y| < \tfrac{N-M}{20} + |M-N|$$
$$(N-M) - \tfrac{N-M}{20} < \ y-x < N-M + \tfrac{N-M}{20} \qquad (**)$$
$$\tfrac{19(N-M)}{20} < y-x$$
$$\tfrac{N-M}{20} < y-x$$

Laat $z = \left[\frac{x+y}{2}\right]$ dus $z \in \mathbb{N}$. Er is een priemgetal p met zRp. Dan volgt uit (*)

$$\Big||x-z|-|M-p|\Big| < \frac{N-M}{20}$$

of nog:

$$\Big||M-p|-|x-z|\Big| < \frac{N-M}{20}$$

of

$$|M-p|-|x-z| < \frac{N-M}{20}$$

of

$$p-M \leq |M-p| < |x-z| + \frac{N-M}{20} \leq \frac{1}{2}(y-x) + \frac{N-M}{20}.$$

En uit (**) volgt:

$$< \frac{1}{2}\Big((N-M)+\frac{N-M}{20}\Big)+\frac{N-M}{20} = (N-M)(\frac{1}{2}+\frac{1}{40}+\frac{1}{20}) < N-M.$$

Dus

$$|M-p| < N-M$$

en ook

$$|p-M| < N-M$$

en $p - M < N - M$.

Dus $\boxed{p < N}$

We weten dat: xRM

zRp

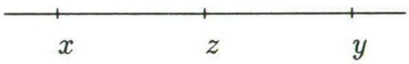
yRN

Uit (*) volgt dat eveneens geldt dat:

$$\Big||z-y| - |p-N|\Big| < \frac{N-M}{20}$$

en dus

$$|p-N| < |z-y| + \frac{N-M}{20} = y - z + \frac{N-M}{20}.$$



Aangezien $z = \left[\frac{x+y}{2}\right]$ geldt dat $z > \frac{x+y}{2} - 1$ en $z - y > \frac{x+y}{2} - 1 - y = \frac{x-y}{2} - 1$ en dus $y - z < \frac{y-z}{2} + 1$. Daaruit volgt dat

$$y - z + \frac{N-M}{20} < \frac{y-x}{2} + 1 + \frac{N-M}{20} = \frac{y-x}{2} + \frac{N-M}{20} + 1.$$

Uit (**) weten we dat $y - x < N - M + \frac{N-M}{20}$ en dus

$$\frac{y-x}{2} < \frac{1}{2}\left((N-M) + \frac{N-M}{20}\right).$$

Dus :

$$\frac{y-x}{2}+\frac{N-M}{20}+1 \;<\; \frac{1}{2}\left((N-M)+\frac{N-M}{20}\right)+\frac{N-M}{20}+1=$$
$$=(N-M)(\frac{1}{2}+\frac{1}{40}+\frac{1}{20})+1<\frac{2}{3}(N-M)+1.$$

Indien we tevens veronderstellen dat $N-M>3$ geldt nog dat

$$\frac{2}{3}(N-M)+1<N-M.$$

Dus : $|p-N|<N-M$

$N-p<N-M$

$p-N>M-N$

$\boxed{p>M}$

Dus : $M<p<N$, maar tussen M en N zitten er geen priemgetallen. De veronderstelling dat $d_G[(\mathbb{N},|\quad|),(\mathrm{P_r},|\quad|)]<\frac{\mathrm{N-M}}{20}$ leidt tot een tegenspraak. Dus

$$d_G[(\mathbb{N},|\quad|),(\mathrm{P_r},|\quad|)]\geq\frac{\mathrm{N-M}}{20}$$

voor iedere M en N, dus

$$d_G[(\mathbb{N},|\quad|),(\mathrm{P_r},|\quad|)]=+\infty.$$

$\square$

Voorbeeld 11 suggereert volgende stelling:

Stelling 29: $A \subset \mathbb{N}$, $\mathrm{A} = \{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \ldots\}$, $\mathrm{a}_1 < \mathrm{a}_2 < \mathrm{a}_3 < \ldots$, $\mathrm{K} = \sup\limits_{\mathrm{n}}(\mathrm{a}_{\mathrm{n}+1} - \mathrm{a}_{\mathrm{n}})$ *dan geldt dat* $d_G[(\mathbb{N}, |\ \ |), (\mathrm{A}, |\ \ |)] = \mathrm{K} - 1$

Bewijs: Het bewijs bestaat uit twee delen.

(I) We tonen eerst aan dat $d_G[(\mathbb{N}, |\ \ |), (\mathrm{A}, |\ \ |)] \leq \mathrm{K} - 1$

Laat $b_n = 1 + a_n - a_1$. Dan $1 = b_1 < b_2 < b_3 < \ldots$ Bij elke $x \in \mathbb{N}$ bestaat dus één n met $b_n \leq x < b_{n+1}$.

Definieer: $xRa_n \Longleftrightarrow b_n \leq x < b_{n+1}$.

R voldoet dus aan de voorwaarden $p_{r_1}R = \mathbb{N}$ en $p_{r_2}R = A$.

Bewering: R is een $(K-1)$-relatie, d.w.z.

$$\begin{matrix} x & R & a_n \\ y & R & a_m \end{matrix} \Longrightarrow ||x-y| - |a_n - a_m|| \leq K - 1.$$

Bewijs: Laat xRa_n en yRa_m. Dan

$$b_n \leq x < b_{n+1}$$

en

$$b_m \leq y < b_{m+1}$$

waaruit volgt

$$b_n - b_{m+1} < x - y < b_{n+1} - b_m$$

ofwel

$$a_n - a_{m+1} < x - y < a_{n+1} - a_m.$$

Dan

$$a_m - a_{m+1} < (x-y) - (a_n - a_m) < a_{n+1} - a_n$$

dus

$$-K < (x-y) - (a_n - a_m) < K$$

dus

$$|(x-y) - (a_n - a_m)| < K.$$

Omdat x, y, a_n, a_m en K geheel zijn, moet dan

$$|(x-y) - (a_n - a_m)| \leq K - 1.$$

Dan zeker

$$||x-y| - |a_n - a_m|| \leq K - 1.$$

(Voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad ||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|$.)

(II) We tonen aan dat $d_G[(\mathbb{N}, |\quad|), (\mathrm{A}, |\quad|)] = \mathrm{K} - 1$.

Zij R een ϵ-approximatie tussen $\mathbb{N}$ en A die voldoet aan $p_{r_1}R = \mathbb{N}$ en $p_{r_2}R = A$.

Bewering: $\epsilon \geq K - 1$.

Bewijs: Neem $p \in \mathbb{N}$. Laat $a_{p+1} - a_p = K_p$. We tonen aan dat $\epsilon \geq K_p - 1$.

Zij $u = \max\{x \in \mathbb{N} : \text{er is } q \leq p \text{ met } xRa_q\}$. Kies q met $q \leq p$ en uRa_q.

Er is q' met $(u+1)Ra_{q'}$. Dan $q' \not\leq p$ (definitie van u), dus $q' > p$ dus $q' \geq p + 1$ dus

$$a_{q'} \geq a_{p+1} = a_p + K_p \geq a_q + K_p.$$

Nu geldt dat

$$uRa_q \text{ en } (u+1)Ra_{q'} \text{ dus } ||(u+1)-u| - |a_{q'} - a_q|| \leq \epsilon$$

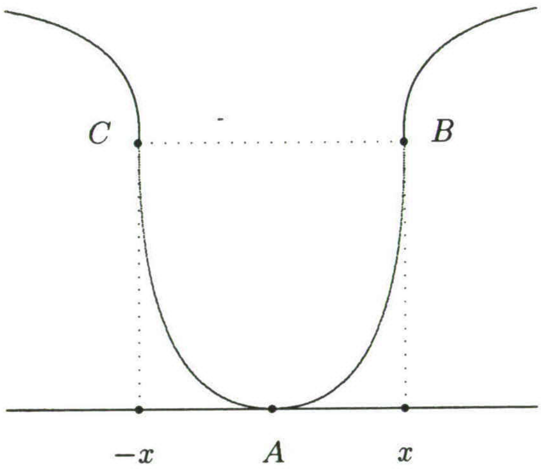
en $|1 - (a_{q'} - a_q)| \leq \epsilon$ en omdat $a_{q'} - a_q \geq K_p$ is $K_p - 1 \leq \epsilon$.

Dit geldt voor iedere $p \in \mathbb{N}$, dus $\epsilon \geq K - 1$ en derhalve

$d_G[(\mathbb{N}, |\quad|), (A, |\quad|)] = K - 1.$ $\square$

Stelling 30: *Gegeven* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(0) = 0$$
$$f(x) = f(-x) \textit{ voor } x \in \mathbb{R}$$
$$G = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$$



Dan geldt: Wanneer de Gromov-afstand tussen G en $\mathbb{R}$ eindig is, m.a.w. wanneer er een ϵ-approximatie is tussen G en $\mathbb{R}$; en $x > \frac{3}{2}\epsilon$ dan is $|f(x)| \leq \sqrt{3\epsilon x + \frac{9}{4}\epsilon^2}$.

Bewijs: Stel de Gromov-afstand tussen G en $\mathbb{R}$ is eindig. Dan bestaat er een ϵ-approximatie R tussen G en $\mathbb{R}$.

Neem $x > 0, \quad A, B, C \in G.$

$A = (0,0)$

$B = (x, f(x))$

$C = (-x, f(x))$

Er zijn $a, b, c \in \mathbb{R}$ met aRA, bRB, cRC.

Met betrekking tot de ligging van de punten $a, b, c \in \mathbb{R}$ kunnen zich volgende gevallen voordoen.

$b \quad a \quad c$ of $c \quad a \quad b$

$$\| B - C \| + \epsilon \geq |b - c| = |a - b| + |c - a| \geq \| A - B \| - \epsilon + \| C - A \| - \epsilon$$

$a \quad b \quad c$ of $c \quad b \quad a$

$$\| A - C \| + \epsilon \geq |a - c| = |a - b| + |b - c| \geq \| A - B \| - \epsilon + \| B - C \| - \epsilon$$

$a \quad c \quad b$ of $b \quad c \quad a$

$$\| A - B \| + \epsilon \geq |a - b| = |a - c| + |b - c| \geq \| A - C \| - \epsilon + \| B - C \| - \epsilon$$

Hieruit bekomen we volgende ongelijkheden :

$$\| B - C \| + 3\epsilon \geq \| A - B \| + \| C - A \|$$

of

$$\| A - C \| + 3\epsilon \geq \| A - B \| + \| B - C \|$$

of

$$\| A - B \| + 3\epsilon \geq \| A - C \| + \| B - C \|$$

En verder:

$$2x + 3\epsilon \geq \sqrt{x^2 + f(x)^2} + \sqrt{x^2 + f(x)^2}$$

of

$$\sqrt{x^2 + f(x)^2} + 3\epsilon \geq \sqrt{x^2 + f(x)^2} + 2x$$

of

$$\sqrt{x^2 + f(x)^2} + 3\epsilon \geq \sqrt{x^2 + f(x)^2} + 2x.$$

$$\text{Dus: } 2x + 3\epsilon \geq 2\sqrt{x^2 + f(x)^2}$$

of

$$3\epsilon \geq 2x.$$

$$\begin{array}{lll}
\text{Dus} & x + \frac{3}{2}\epsilon \geq \sqrt{x^2 + f(x)^2} & \text{of} \quad 2x \leq 3\epsilon; \\
\text{dus} & x^2 + 3\epsilon x + \frac{9}{4}\epsilon^2 \geq x^2 + f(x)^2 & \text{of} \quad x \leq \frac{3}{2}\epsilon; \\
\text{dus} & 3\epsilon x + \frac{9}{4}\epsilon^2 \geq f(x)^2 & \text{of} \quad x \leq \frac{3}{2}\epsilon; \\
\text{dus} & |f(x)| \leq \sqrt{3\epsilon x + \frac{9}{4}\epsilon^2} & \text{of} \quad x \leq \frac{3}{2}\epsilon.
\end{array}$$

Daaruit volgt: als $x > \frac{3}{2}\epsilon$ dan moet $|f(x)| \leq \sqrt{3\epsilon x + \frac{9}{4}\epsilon^2}$. □

We zien nu dat $f(x) = x^2$ hieraan niet voldoet.

Corollarium: $d_G[(G, |\quad|), (\mathbb{R}, |\quad|)] = +\infty$ als G de grafiek is van $f(x) = x^2$.

Omgekeerd geldt niet dat $|f(x)| \leq \sqrt{3\epsilon x + \frac{9}{4}\epsilon^2}$ voor $x > \frac{3}{2}\epsilon$ impliceert dat $x \mapsto (x, f(x))$ een ϵ-approximatie is tussen $\mathbb{R}$ en G.

Tegenvoorbeeld:

$x \mapsto (x, f(x))$ is geen 1-approximatie voor $f(x) = \sqrt{|x|}\cos x$ alhoewel

$$\sqrt{|x|}\,|\cos x| \leq \sqrt{|x|} \leq \sqrt{3\epsilon x + \frac{9}{4}\epsilon^2} \qquad \text{voor } x > \frac{3}{2} \text{ en } \epsilon \geq \frac{1}{3}.$$

We tonen aan dat $x \mapsto (x, \sqrt{|x|}\ \cos x)$ geen 1-approximatie is ($\epsilon = 1$).

Inderdaad:

Moest $x \mapsto (x, \sqrt{|x|}\ \cos x)$ een 1-approximatie zijn, dan moet gelden:

$xR(x, \sqrt{|x|}\ \cos x)$ en $yR(y, \sqrt{|y|}\ \cos y) \Rightarrow$

$$\left| |x-y| - \sqrt{(x-y)^2 + (\sqrt{|x|}\ \cos x - \sqrt{|y|}\ \cos y)^2} \right| \leq 1$$

Maar $x = 2\pi$ en $y = \pi$ levert een tegenspraak op.

Stelling 31: *Zij* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *willekeurig, dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

(i) $x \mapsto (x, f(x))$ is een ϵ-approximatie tussen $\mathbb{R}$ en $G = \{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}\}$

(ii) $|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{\epsilon^2 + 2\epsilon|x-y|}$ alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Bewijs: $x \mapsto (x, f(x))$ is een ϵ-approximatie $\Leftrightarrow$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\left| \sqrt{(x-y)^2 + (f(x) - f(y))^2} - |x-y| \right| &\leq \epsilon \Leftrightarrow \\
\sqrt{(x-y)^2 + (f(x) - f(y))^2} &\leq \epsilon + |x-y| \Leftrightarrow \\
(x-y)^2 + (f(x) - f(y))^2 &\leq \epsilon^2 + 2\epsilon|x-y| + |x-y|^2 \Leftrightarrow \\
|f(x) - f(y)| &\leq \sqrt{\epsilon^2 + 2\epsilon|x-y|}.
\end{aligned}$$

$\square$

Stelling 32 : *Als* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *begrensd is, dan is*

$$d_G[(G, |\quad|), (\mathbb{R}, |\quad|)] < \infty$$

waarbij

$$G = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Bewijs : Veronderstel $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ begrensd; dus er bestaat $A \in \mathbb{R}$, zó dat $|f(x)| \leq 2A$ voor iedere $x \in \mathbb{R}$. Dan geldt ook dat $|f(x) - f(y)| \leq 2A$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Neem $\epsilon = 2A$, we beschouwen

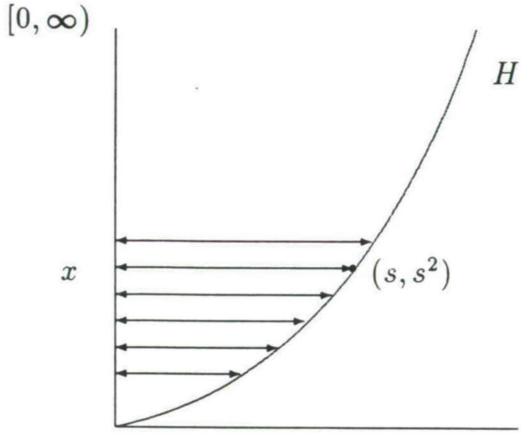
$$\sqrt{\epsilon^2 + 2\epsilon|x - y|} \geq \sqrt{\epsilon^2} = \epsilon = 2A \geq |f(x) - f(y)|.$$

Op grond van stelling 31 zien we dat $x \mapsto (x, f(x))$ een ϵ-approximatie is tussen $\mathbb{R}$ en G, dus

$$d_G[(G, |\quad|), (\mathbb{R}, |\quad|)] \text{ is eindig.}$$

$\square$

Voorbeeld 12 :



$H = \{(s, s^2) : s \geq 0\}$

We tonen aan dat

$d_G[(H, |\ \ |), ([0,\infty), |\ \ |)]$

eindig is.

We definiëren de relatie $R \subset [0,\infty) \times H$ door $s^2 R(s,s^2)$ en we laten zien dat R een $\frac{1}{2}$-approximatie is.

Bewijs : We tonen daartoe aan dat :

$s^2 R(s,s^2)$ en $t^2 R(t,t^2) \Longrightarrow \Big| |s^2 - t^2| - \| (s,s^2) - (t,t^2) \| \Big| \leq \frac{1}{2}$.

We moeten aantonen dat :

$$-\tfrac{1}{2} \leq |s^2 - t^2| - \sqrt{(s-t)^2 + (s^2-t^2)^2} \leq \tfrac{1}{2} \text{ als } s,t \geq 0$$

De ongelijkheid $|s^2 - t^2| \leq \sqrt{(s-t)^2 + (s^2-t^2)^2} + \frac{1}{2}$ is triviaal.

Verder moeten we aantonen :

$$-\frac{1}{2} \leq |s^2 - t^2| - \sqrt{(s-t)^2 + (s^2-t^2)^2} \quad \text{als } s,t \geq 0$$

$$
\begin{aligned}
\text{of } \sqrt{(s-t)^2+(s^2-t^2)^2} &\leq |s^2-t^2|+\frac{1}{2} \\
\text{of } (s-t)^2+(s^2-t^2)^2 &\leq (s^2-t^2)^2+2|s^2-t^2|.\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \\
\text{of } (s-t)^2 &\leq |s^2-t^2|+\frac{1}{4} \\
\text{of } |s-t| \quad |s-t| &\leq |s-t| \quad |s+t|+\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Aan deze laatste ongelijkheid is voldaan als $s,t \geq 0$.

De relatie $s^2R(s,s^2)$ is dus een $\frac{1}{2}$-approximatie en

$$d_G[(H,| \quad |),([0,\infty),| \quad |)] \leq \frac{1}{2}.$$

□

Het is interessant om na te gaan welke de kleinste ϵ is waarvoor $s^2R(s,s^2)$ een ϵ-relatie blijft.

Daartoe moeten we onderzoeken welke de minimale ϵ is waarvoor

$$-\epsilon \leq |s^2-t^2| - \sqrt{(s-t)^2+(s^2-t^2)^2} \leq \epsilon \quad \text{als } s,t \geq 0.$$

De ongelijkheid $|s^2-t^2| \leq \sqrt{(s-t)^2+(s^2-t^2)^2}+\epsilon$ is opnieuw triviaal.

Aan de ongelijkheid

$$\sqrt{(s-t)^2+(s^2-t^2)^2} \leq |s^2-t^2|+\epsilon \qquad (*)$$

moet voldoen zijn als $s,t \geq 0$.

Neem $s=(\lambda+1)t$, waar $\lambda>0$.

$$\begin{aligned} \text{Dus } s - t &= \lambda t \\ \text{en } s + t &= (\lambda + 2)t \end{aligned}$$

Dan wordt (*):

$$\sqrt{\lambda^2 t^2 + \lambda^2 t^2 (\lambda + 2)^2 t^2} \leq \lambda t (\lambda + 2) t + \epsilon$$

$$\begin{aligned} \text{of} \quad \lambda^2 t^2 &\leq 2\epsilon\lambda.(\lambda + 2)t^2 + \epsilon^2 \\ \text{of} \quad \lambda^2 &\leq 2\epsilon\lambda(\lambda + 2) + \frac{\epsilon^2}{t^2} \text{ voor alle } t > 0 \text{ en } \lambda > 0 \\ \text{Dus ook} \quad \lambda^2 &\leq 2\epsilon\lambda(\lambda + 2) + \lim_{t \to +\infty} \frac{\epsilon^2}{t^2} = 2\epsilon\lambda(\lambda + 2) \\ \text{of} \quad 1 &\leq 2\epsilon(1 + \frac{2}{\lambda}) \quad \text{voor } \lambda > 0 \\ \text{en ook} \quad 1 &\leq 2\epsilon \lim_{\lambda \to +\infty} (1 + \frac{2}{\lambda}) = 2\epsilon \end{aligned}$$

Dus $\epsilon \geq \frac{1}{2}$.

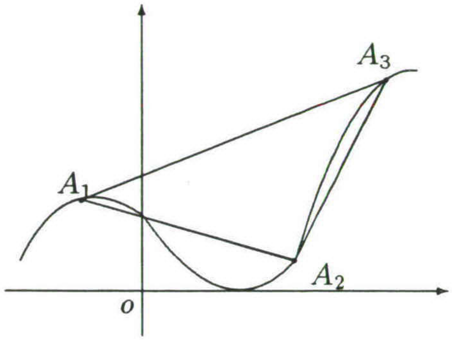
Stelling 33 : *Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ willekeurig, veronderstel dat er een ϵ-approximatie bestaat tussen $G = \{(x, f(x))\}$ en de x-as, dan geldt voor ieder drietal punten A_1, A_2, A_3 op G met*

$$A_1 \hat{A}_2 A_3 \geq \max\{A_2 \hat{A}_3 A_1, A_3 \hat{A}_1 A_2\}$$

dat

$$\| A_1 - A_2 \| + \| A_2 - A_3 \| \leq 3\epsilon + \| A_3 - A_1 \| .$$

Bewijs :



Neem drie willekeurig punten A_1, A_2, A_3 op G, dan geldt (zie het bewijs van stelling 30)

$$\| A_1 - A_2 \| + \| A_3 - A_1 \| \leq \| A_2 - A_3 \| + 3\epsilon$$
of
$$\| A_1 - A_2 \| + \| A_2 - A_3 \| \leq \| A_1 - A_3 \| + 3\epsilon$$
of
$$\| A_1 - A_3 \| + \| A_2 - A_3 \| \leq \| A_1 - A_2 \| + 3\epsilon$$

Aangezien in de driehoek $A_1A_2A_3$ tegenover de grootste hoek de grootste zijde staat, geldt : indien

$$A_1\hat{A}_2A_3 \geq \max\{A_2\hat{A}_3A_1, A_3\hat{A}_1A_2\}$$

dan ook $\| A_1 - A_2 \| + \| A_2 - A_3 \| \leq 3\epsilon + \| A_3 - A_1 \|$. □

Hieruit volgt dat als $d_G[(G,|\quad|),(\mathbb{R},|\quad|)]=0$, $A_1A_2A_3$ op één rechte liggen, m.a.w. G is dan een rechte.

Het omgekeerde van stelling 33 nl., zij $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ willekeurig, veronderstel dat voor ieder drietal punten A_1,A_2,A_3 op $G=\{(x,f(x));x\in\mathbb{R}\}$ waarvoor geldt dat

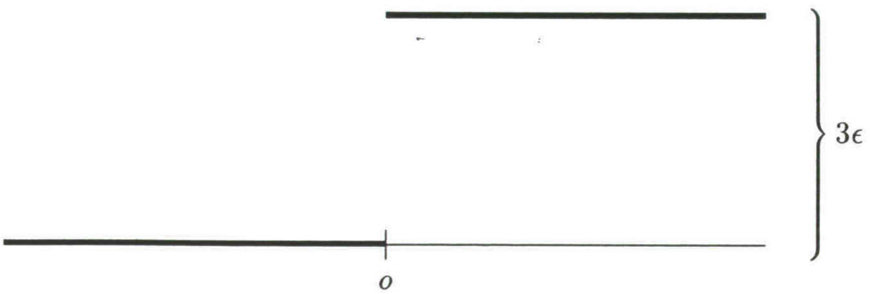
$$A_1\hat{A}_2A_3\geq\max\{A_2\hat{A}_3A_1,A_3\hat{A}_1A_2\}$$

ook geldt dat

$$\| A_1-A_2\| + \| A_2-A_3\| \leq 3\epsilon + \| A_3-A_1\|,$$

dan bestaat er een ϵ-approximatie tussen G en de x-as, geldt niet.

Tegenvoorbeeld :

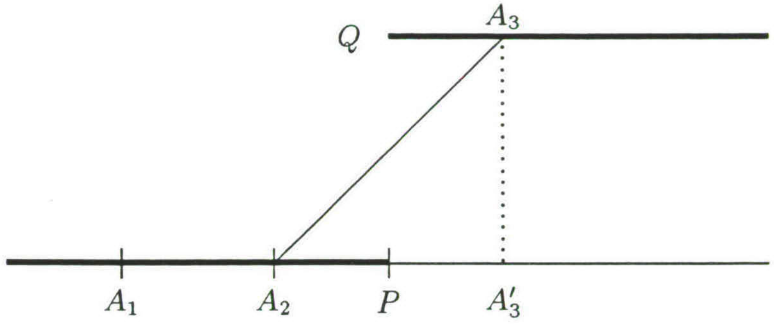


$f(x)=0$ als $x\leq 0$

$f(x)=3\epsilon$ als $x>0$

$A_1,A_2,A_3\in G$ $\qquad P=(0,0)$

$\qquad Q=(0,3\epsilon)$



$$
\begin{aligned}
\| A_1 - A_2 \| + \| A_2 - A_3 \| &\leq \| A_1 - A_2 \| + \| A_2 - P \| + \| P - Q \| + \| Q - A_3 \| \\
&\leq \| A_1 - A_2 \| + \| A_2 - P \| + \| Q - A_3 \| + 3\epsilon \\
&= \| A_1 - A_3' \| + 3\epsilon \leq \| A_1 - A_3 \| + 3\epsilon
\end{aligned}
$$

Stel dat we een ϵ-approximatie R hebben tussen de x-as en G, dan

$$\ldots, -2\frac{\epsilon}{2}, -\frac{\epsilon}{2}, 0, \frac{\epsilon}{2}, 2\frac{\epsilon}{2}, 3\frac{\epsilon}{2}, \ldots \in \mathbb{R}.$$

Bij $p \in Z$ kiezen we $B_p \in G$ met $(p\frac{\epsilon}{2})RB_p$. En bij $p+1 \in Z$ kiezen we $B_{p+1} \in G$ met $(p+1)\frac{\epsilon}{2}RB_{p+1}$.

Nu geldt :

$p\frac{\epsilon}{2}RB_p$ en $(p+1)\frac{\epsilon}{2}RB_{p+1} \Longrightarrow \left| |(p+1)\frac{\epsilon}{2} - p\frac{\epsilon}{2}| - \| B_{p+1} - B_p \| \right| \leq \epsilon$.

$$
\begin{aligned}
&\text{Dus } \left| \tfrac{\epsilon}{2} - \| B_{p+1} - B_p \| \right| \leq \epsilon \\
&\text{of } -\epsilon \leq \| B_{p+1} - B_p \| - \tfrac{\epsilon}{2} \leq \epsilon \\
&\text{of } \| B_{p+1} - B_p \| \leq (1 + \tfrac{1}{2})\epsilon \leq 3\epsilon
\end{aligned}
$$

Als B_p op het bovenste deel van G ligt, dan ligt B_{p+1} eveneens op het bovenste deel van G. Met andere woorden, indien één B_p op het bovenste deel van G ligt, ligt elke B_p, $p \in Z$ op het bovenste deel van de grafiek.

Veronderstel nu dat iedere B_p, $p \in Z$ op het bovenste deel van de grafiek ligt.

Kies nu $C \in G$ op het onderste deel van de grafiek.

Er is $x \in \mathbb{R}$ met xRC.

Er is $p \in \mathbf{Z}$ met $|x - p\frac{\epsilon}{2}| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Dan: xRC en $p\frac{\epsilon}{2}RB_p \Longrightarrow \Big| |x - p\frac{\epsilon}{2}| - \parallel C - B_p \parallel \Big| \leq \epsilon$, waaruit

$$\parallel C - B_p \parallel \leq (1 + \frac{1}{2})\epsilon < 3\epsilon.$$

Daaruit volgt echter dat C op het bovenste deel ligt, hetgeen een tegenspraak oplevert.

Hoofdstuk 6

De gegeneraliseerde T-ruimte

We willen de waarnemingstheorie zoals deze geformuleerd wordt met de axioma's T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, generaliseren.

Laat X een verzameling van objecten zijn uit de buitenwereld. Verder veronderstellen we dat er een relatie bestaat van vergelijkende similariteit. Het basisidee is dat dit een relatie moet zijn tussen paren van objecten, dus een relatie over

$$\binom{X}{2} := \{\{x_1, x_2\}; x_1 \in X \text{ en } x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2\}.$$

Indien we onze intuïtie van vergelijkende similariteit wiskundig willen vertolken moet deze relatie voldoen aan twee eisen: deze relatie moet reflexief en transitief zijn.

Laat $\preceq$ een quasi-orde relatie zijn over $\binom{X}{2}$ die dus reflexief en transitief is.

Wanneer we dit willen uitdrukken in de eerste orde taal met X als uniek universum van variabelen, dan hoeven we alleen een eerste-orde taal L te beschouwen met daarin één enkel 4-plaatsig relatie symbool T.

We stellen:

$$T(x, y, z, u) \Leftrightarrow \{x, y\} \preceq \{z, u\}.$$

Drukken we de reflexiviteit en transiviteit uit in deze eerste-orde taal, dan krijgen we volgende axioma's.

A_1 $\quad \forall xy\, [T(x,y,x,y)]$

A_2 $\quad \forall xyzuvw\, [T(x,y,z,u) \& T(z,u,v,w) \to T(x,y,v,w)]$

Verder drukken we uit dat de volgorde van de paren geen rol speelt.

A_3 $\quad \forall xyzu\, [T(x,y,z,u) \leftrightarrow T(y,x,z,u) \leftrightarrow T(x,y,u,z)]$

Het axioma T_1 ingevoerd door Williamson:

$$\forall xyzu\, [T(x,y,z,u) \vee T(z,u,x,y)]$$

laten we weg. Het drukt uit dat elke twee paren objecten vergelijkbaar zijn. Welnu, het is best mogelijk dat twee paren objecten uit $\binom{X}{2}$ qua gelijkaardigheid gewoonweg niet te vergelijken zijn. T_1 drukt uit dat de T-ruimte totaal is. Is (X,d) een quasi-metrische ruimte en definiëren we $T(x,y,z,u) \Leftrightarrow d(x,y) \leq d(z,u)$, dan geldt T_1 automatisch.

We vatten de buitenwereld op als een verzameling X van objecten voorzien van een quasi-orde relatie over $\binom{X}{2}$.

Alles kan in de eerste-orde taal $L(T)$ uitgedrukt worden en we stellen ons over de buitenwereld uitsluitend vragen die in die eerste-orde taal $L(T)$ uitdrukbaar zijn.

We zagen reeds dat als $(V, \preceq)$ een structuur is met quasi-orde relatie $\preceq$, $x \in V$ en $Q(x) = \{y \in V \mid y \preceq x\}$, (V,τ) een topologie is met $\{Q(x) \mid x \in V\}$ als basis. Deze topologie is een Alexandrov topologie. Omgekeerd, is (V,τ) een Alexandrov topologie en is $Q(x)$ de transfiniete doorsnede van alle open deelverzamelingen die x bevatten, dan is de relatie $x \preceq y \Leftrightarrow Q(x) \subseteq Q(y)$ een quasi-orde relatie.

Verder is het duidelijk dat, indien (X, τ) een Alexandrov topologie is en $A \subseteq X$, ook geldt dat

$$A \in \tau \Leftrightarrow \forall a[a \in A \Rightarrow Q(a) \subseteq A]$$

ofwel

$$A \in \tau \Leftrightarrow \forall a, b[a \in A \text{ en } b \preceq a \Rightarrow b \in A].$$

Definitie 25 : *p is limietpunt van $A \Leftrightarrow Q(p) \cap A \neq \emptyset$.*

Uitgedrukt in de taal van de quasi-orde relaties wordt dit :

p is limietpunt van $A \Leftrightarrow \exists a \in A[a \preceq p]$.

Definitie 26 : *$A \subseteq X$ is dicht in $X \Leftrightarrow$ elk punt in X is een limietpunt van A.*

Dus : $\forall x \in X \exists a \in A[a \preceq x]$.

Definitie 27 : *Een lineaire graaf met (X, A) met $A \subseteq \binom{X}{2}$ is open (in $\binom{X}{2}$) indien uit $\{u, v\} \preceq \{x, y\} \in A$ volgt dat $\{u, v\} \in A$.*

Definitie 28 : *Een lineaire graaf(X, A) met $A \subseteq \binom{X}{2}$ is dicht (in $\binom{X}{2}$) indien*

$$\forall\{a, b\} \in \binom{X}{2} \exists\{x, y\} \in A[\{x, y\} \preceq \{a, b\}].$$

Stelling 34: *Zij* (X, d) *een quasi-metrische ruimte (de buitenwereld),* $\epsilon_0 \in \mathbb{R}^+$ *en*

$$A_{\epsilon_0} = \left\{ \{x, y\} \in \binom{X}{2} \mid d(x, y) < \epsilon_0 \right\},$$

dan is $\preceq$*, gedefinieerd door*

$$\{x, y\} \preceq \{z, u\} := d(x, y) \leq d(z, u),$$

een quasi-orde relatie op $\binom{X}{2}$ *(welke dus een Alexandrov topologie* $(\binom{X}{2}, \tau)$ *induceert) en* A_{ϵ_0} *is open in* $\binom{X}{2}$*.*

Bewijs: Neem $\{z, u\} \in A_{\epsilon_0}$, stel dat voor $\{x, y\} \in \binom{X}{2}$ geldt dat $d(x, y) \leq d(z, u)$. Aangezien $\{z, u\} \in A_{\epsilon_0}$, geldt dat $d(z, u) < \epsilon_0$. Maar dan ook $d(x, y) \leq d(z, u) < \epsilon_0$, dus $\{x, y\} \in A_{\epsilon_0}$. Op grond van definitie 27 is A_{ϵ_0} open. $\square$

Opmerking: Zij X eindig, (X, A) een lineaire graaf, $A \subseteq \binom{X}{2}$ en (X, d) een quasi-metrische ruimte, dan geldt dat als A open is in $\binom{X}{2}$, A van de vorm

$$A_\epsilon = \left\{ \{x, y\} \in \binom{X}{2} \mid d(x, y) < \epsilon \right\}$$

is voor zekere $\epsilon \in \mathbb{R}^+$.

Inderdaad: Zij A open in $\binom{X}{2}$, $\epsilon_0 = \max \{d(x, y) \mid \{x, y\} \in A\}$.

(1) Als $\{u, v\} \in A$, dan $d(u, v) \leq \epsilon_0$.

(2) Er is $\{x_0, y_0\} \in A$ met $d(x_0, y_0) = \epsilon_0$.

Als $\{u, v\} \in \binom{X}{2}$ en $d(u, v) \leq \epsilon_0$, dan is $d(u, v) \leq d(x_0, y_0)$, dus $\{u, v\} \in A$.

Dus $A = \left\{\{u,v\} \in \binom{X}{2} \mid d(u,v) \leq \epsilon_0\right\}$.

Omdat X eindig is, is er een $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ zó dat

$$A = \left\{\{u,v\} \in \binom{X}{2} \mid d(u,v) < \epsilon\right\}.$$

Wanneer echter X een oneindige verzameling is geldt in het algemeen niet meer dat indien A open is, A van de vorm

$$A = \left\{\{u,v\} \in \binom{X}{2} \mid d(u,v) < \epsilon\right\}$$

is. Inderdaad:

Zij $X = \mathbb{R}$, $d =$ de Euclidische afstand.

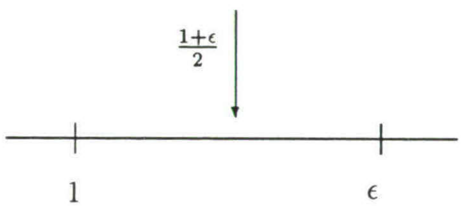
Zij $A = \{\{x,y\} \mid d(x,y) \leq 1\}$.

Op grond van definitie 27 is A open.

Stel nu $\epsilon > 0$ en $A = \{\{x,y\} \mid d(x,y) < \epsilon\}$.

We merken op: $\{1,0\} \in A$ dus $1 < \epsilon$.

Dan $d(\frac{1+\epsilon}{2}, 0) = \frac{1+\epsilon}{2} < \epsilon$



dus $\{\frac{1+\epsilon}{2}, 0\} \in A$

dus $d(\frac{1+\epsilon}{2}, 0) \leq 1$.

Maar $1 < \frac{1+\epsilon}{2}$, we hebben een tegenspraak.

Wat we willen aantonen is, dat het begrip van een niet volledige nauwkeurige waarneming van een eindig deel van de buitenwereld in feite neerkomt op één enkele open deelverzameling van een Alexandrov topologie. Met andere woorden, dat één open deelverzameling van die Alexandrov topologie volledig de nauwkeurigheid van die waarneming bepaalt en omgekeerd dat elke waarneming van de buitenwereld juist één enkele open deelverzameling bepaalt. In het bijzondere geval waarbij (X, d) een quasi-metrische ruimte is met

$$\begin{aligned} T(x,y,z,u) \Leftrightarrow d(x,y) &\leq d(z,u), \\ \text{ofwel } \{x,y\} \preceq \{z,u\} \Leftrightarrow d(x,y) &\leq d(z,u), \end{aligned}$$

zal een open verzameling A juist iets zijn van de gedaante

$$\left\{ \{x,y\} \in \binom{X}{2} \mid d(x,y) < \epsilon_0 \right\},$$

voor zekere $\epsilon_0 \in \mathbb{R}^+$.

De buitenwereld X is aldus op te vatten als een Alexandrov topologie op $\binom{X}{2}$, waar X de verzameling is van waarneembare objecten.

Hebben we nu in het algemeen een waarneming en kunnen twee objecten x en y niet meer als verschillend opgevat worden, m.a.w. $\{x,y\} \in A$, dan zullen twee objecten u en v uit de buitenwereld, die nog meer op elkaar gelijken dan x en y, dus $\{u,v\} \preceq \{x,y\}$, zeker niet meer als verschillend opgevat worden. Maar dit betekent juist dat A een open verzameling is in de Alexandrov topologie op $\binom{X}{2}$.

Is A bovendien dicht, dan kunnen we over een dichte waarneming spreken.

<u>Toepassingen</u>

De Gromov-afstand

Zij X een verzameling van metrische ruimten.

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \Leftrightarrow d_G[x_1, y_1] \leq d_G[x_2, y_2].$$

Aan de axioma's A_1, A_2, A_3 is voldaan. Daarenboven is $\preceq$ totaal, zodat $< X, T >$ een totale T-ruimte is.

Beschouw nu de lineaire graaf (X, E) met

$$E = \{\{x, y\} \mid d_G[(x, y)] = 0\}.$$

Deze graaf is open en dicht; hij correspondeert met een ideale waarneming.

Alleen metrische ruimten met Gromov-afstand $= 0$ kunnen niet van elkaar onderscheiden worden. Met iedere andere waarneming W correspondeert een open-dichte graaf die E als deelgraaf heeft.

Inderdaad: Zij $W = \{\{x, y\} \mid d_G[(x, y)] \leq \epsilon_0\}$, $\epsilon_0 \in \mathbb{R}^+$, dan geldt dat $E \subseteq W$.

Maattheorie

Definitie 29 : *Een paar $< X, \mathcal{a} >$ met $\mathcal{a} \subseteq P(X)$ noemen we een meetbare ruimte als*

(a) $X \in \mathcal{a}$.

(b) Als $A \in \mathcal{a}$, *dan* $A^c \in \mathcal{a}$.

(c) De vereniging van aftelbaar veel elementen van $\mathcal{a}$ *is een element van* $\mathcal{a}$.

Definitie 30 : *Zij $< X, \mathcal{a} >$ een meetbare ruimte. Een maat in X is een functie $\mu : \mathcal{a} \to [0, \infty]$ met de eigenschappen :*

(a) $\mu\varnothing = 0$

(b) Als $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{a}$ twee aan twee disjunct zijn, dan is $\mu(\cup A_n) = \sum \mu A_n$ (σ-additiviteit).

(i) Zij $< X, \mathcal{a} >$ een meetbare ruimte voorzien van een maat μ.

$\{x_1, y_1\} \preceq \{x_2, y_2\} \Leftrightarrow$
$|\mu(x_1) - \mu(y_1)| \leq |\mu(x_2) - \mu(y_2)|$ voor $x_i, y_i \in \mathcal{a}$. Dan voldoet $\preceq$ aan de axioma's A_1, A_2, A_3. $\preceq$ is totaal, dus (X, T) is een totale T-ruimte.

(ii) $\{x_1, y_1\} \preceq \{x_2, y_2\} \Leftrightarrow \mu(x_1 \cap y_1) \leq \mu(x_2 \cap y_2)$ voor $x_i, y_i \in \mathcal{a}$. Dan voldoet $\preceq$ aan de axioma's A_1, A_2, A_3. $\preceq$ is totaal, dus (X, T) is een totale T-ruimte.

(iii) $\{x_1, y_1\} \preceq \{x_2, y_2\} \Leftrightarrow$
$\mu[(x_1 \cup y_1) \backslash (x_1 \cap y_1)] \leq \mu[(x_2 \cup y_2) \backslash (x_2 \cap y_2)]$ voor $x_i, y_i \in \mathcal{a}$. Dan

voldoet $\preceq$ aan de axioma's A_1, A_2, A_3. $\preceq$ is totaal, dus (X, T) is een totale T-ruimte.

Niet-totale T-ruimten

We noemen een T-ruimte niet totaal indien

$\exists xyzu[\sim T(x,y,z,u) \& \sim T(z,u,x,y)]$, ofwel

$\exists xyzu[\{x,y\} \not\preceq \{z,u\}$ en $\{z,u\} \not\preceq \{x,y\}]$.

We nemen verschillende (quasi)-metrieken op eenzelfde verzameling X :

$(X, d_1), (X, d_2), (X, d_3), \ldots (X, d_k)$, die verschillende aspekten uitdrukken van een object.

Bijvoorbeeld,

$d_1(x,y) =$ verschil in kleur tussen x en y.

$d_2(x,y) =$ verschil in vorm tussen x en y.

$d_3(x,y) =$ verschil in lichtintensiteit tussen x en y.

Definitie 31 : $\{x,y\} \preceq \{u,v\} \Leftrightarrow d_i(x,y) \leq d_i(u,v)$ *voor alle* $i = 1, 2, \ldots, k$. *Is* $d_1(x,y) \leq d_1(u,v)$ *maar* $d_2(x,y) > d_2(u,v)$ *dan zal* $\{x,y\} \not\preceq \{u,v\}$ *en* $\{u,v\} \not\preceq \{x,y\}$.

Bij een waarneming zullen nu $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_k \in \mathbb{R}^+$ van belang zijn :

$$x \sim y \Leftrightarrow d_i(x,y) \leq \epsilon_i \text{ voor alle } i = 1, 2, \ldots, k.$$

$A_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k} = \{\{x,y\} \mid x \sim y\} \subseteq \binom{X}{2}$ is nu een open graaf, maar $A_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k}$ is in het algemeen niet dicht.

Inderdaad: Neem $\{u,v\} \in \binom{X}{2}$ met $d_1(u,v) > \epsilon_1$ en $d_i(u,v) \leq \epsilon_i$ voor $i = 2,3,\ldots,k$.

Dan zal voor iedere $\{a,b\} \in A_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k}$, $\{a,b\} \not\preceq \{u,v\}$.

Definitie 32 :

$$E \;=\; \{(\{x,y\},\{u,v\}) \mid \textit{voor alle } i = 1,\ldots,k, \quad d_i(x,y) = d_i(u,v) = \alpha_i\},$$
$$\alpha_i \in \mathbb{R}^+, \mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{k}.$$

Stelling 35 : *Zij $\{x,y\} \sim \{u,v\} \Leftrightarrow d_i(x,y) = d_i(u,v) = \alpha_i$ voor alle $i = 1,\ldots,k$. Dan is $\sim$ een equivalentierelatie over $\binom{X}{2}$.*

Bewijs :

(1) Reflexief:

$\{x,y\} \sim \{x,y\} \Leftrightarrow d_i(x,y) = d_i(x,y) = \alpha_i$ voor alle $i = 1,\ldots,k$.

(2) Symmetrisch:

Stel $\{x,y\} \sim \{u,v\}$, dwz $d_i(x,y) = d_i(u,v) = \alpha_i$ voor alle $i = 1,\ldots,k$. Dan ook

$\{u,v\} \sim \{x,y\}$ ofwel $d_i(u,v) = d_i(x,y) = \alpha_i$ voor alle $i = 1,\ldots,k$.

(3) Transitief:

Stel $\{x,y\} \sim \{z,u\}$, dwz $d_i(x,y) = d_i(z,u) = \alpha_i$
voor alle $i = 1,\ldots,k$;

en $\{z,u\} \sim \{r,s\}$, dwz $d_i(z,u) = d_i(r,s) = \alpha_i$ voor alle $i = 1,\ldots,k$

Dan ook

$\{x,y\} \sim \{r,s\}$, m.a.w. $d_i(x,y) = d_i(r,s) = \alpha_i$ voor alle $i = 1,\ldots,k$. $\square$

Dit levert opnieuw een gekleurde graaf op. $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$ is dan de kleur die hoort bij de equivalentieklasse $E_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}$.

In het algemeen zijn deze kleuren niet meer geordend. In het bijzonder kan $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$ echter een singleton zijn.

Hoofdstuk 7

Samenvatting en besluit

We gaan er van uit dat de nauwkeurigheid, waarmede we de buitenwereld observeren naar onder begrensd is. En verder dat het aantal objecten dat we observeren steeds eindig is.

Zij V een eindig deel van de buitenwereld. We gaan uit van een quasi-afstandsfunctie $d : V \times V \to [0, \infty)$. ϵ is de nauwkeurigheid waarmede we de buitenwereld kunnen observeren.

Deze quasi-afstandsfunctie heeft per definitie de volgende eigenschappen:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(x,y) &= d(y,x) \qquad \text{voor } (x,y) \in V \times V \end{aligned}$$

Voor $(x,y) \in V \times V$ schrijven we $x \sim y \Leftrightarrow d(x,y) < \epsilon$.

En voor $(x,y) \in V \times V$ schrijven we $x \not\sim y \Leftrightarrow d(x,y) \geq \epsilon$.

$x \sim y$ drukt uit dat x niet te onderscheiden is van y; $\sim$ heet de similariteitsrelatie. Uit deze relatie $\sim$ leiden we een relatie $\sim'$ af die het mogelijk maakt de buitenwereld te onderzoeken met een nauwkeurigheid die groter is dan ϵ, waarbij ϵ de kleinste 'afstand' is die we in de buitenwereld kunnen onderscheiden.

Zij $T_d(w, x, y, z) := d(w, x) \leq d(y, z)$.

T_d voldoet aan vijf axioma's die gesuggereerd werden door T. Williamson in een artikel dat in 1988 verscheen in *The Notre Dame Journal of Formal Logic.* Later zal blijken dat het eerste axioma van Williamson niet alleen overbodig, doch totaal onredelijk is. Elke 4-plaatsige relatie T die voldoet aan de axioma's van Williamson induceert op $V \times V$ een equivalentie relatie R_2, die de paren uit $V \times V$ indeelt in een eindig aantal equivalentie klassen, die geordend kunnen worden door een totale ordening:

$$R_2[(x, y), (u, v)] := T(x, y, u, v) \& T(u, v, x, y).$$

- In de bovenste equivalentieklasse zitten de paren die het meest van elkaar verschillen.
- In de tweede equivalentieklasse zitten paren $\{x, y\}$ zó dat x en y reeds beter op elkaar lijken dan het geval was met de paren uit de eerste equivalentieklasse.
- De derde equivalentieklasse bevat paren $\{x, y\}$ die nog beter op elkaar gelijken.
- In de onderste klasse zitten ten slotte de paren die niet meer van elkaar te onderscheiden zijn.

Door de elementen van de paren $\{x, y\}$ in eenzelfde equivalentie klasse te verbinden door een gekleurde lijn, daarbij voor verschillende equivalentieklassen verschillende kleuren gebruikend, ontstaat een m-gekleurde graaf, waarbij m het aantal equivalentieklassen is.

Er geldt dat er op isomorfie na één unieke aftelbare lineaire m-gekleurde graaf $\mathcal{U}_m = \langle V, T_{\mathcal{U}_m} \rangle$ bestaat die universeel en homogeen is.

Vervolgens worden over deze universele random T-ruimte verscheidene stellingen bewezen.

Stelling 16 luidt als volgt :

Is $\langle V, T_{\mathcal{U}_m} \rangle$ de universele T-ruimte met m equivalentie klassen $E_0, \ldots, E_{m-1}$, $V \cong \mathbb{N}$, en is $\{x_0, y_0\}$ een paar in V, en definieert men $x \sim y \Leftrightarrow T(x, y, x_0, y_0)$, dan zal, als $\{x_0, y_0\} \notin E_{m-1}$ (de bovenste equivalentieklasse), de lineaire 2-gekleurde graaf $(\mathbb{N}, \sim)$ steeds isomorf zijn met de universele graaf $\mathcal{U}_2$.

Uit deze stelling volgt dat de $\sim$-relatie geïnduceerd door een universele random T-ruimte onafhankelijk is van de nauwkeurigheid van de waarneming (tenzij die minimaal is) !

Wanneer we met behulp van een wiskundig model de werkelijkheid kunnen beschrijven, ligt het voor de hand dat er een bijna-isomorfie bestaat tussen ons denken en de werkelijkheid.

Een voor de hand liggende definitie van 'bijna-isomorf' kan gegeven worden in termen van de Gromov afstand tussen twee metrische ruimten waarvan de ene metrische ruimte kan gedacht worden als het perfekte model van de werkelijkheid en de andere het model is dat we construeren op basis van onze waarneming.

Het blijkt dat de Gromov-afstand een metriek is over een deelverzameling van de klasse van metrische ruimten.

Voor het berekenen van Gromov-afstanden bestaan geen vaste regels.

We bewijzen een aantal stellingen die gebruikt worden om de Gromov-afstand te schatten. De Gromov-afstand wordt in enkele konkrete gevallen berekend. Verder geven we een algoritme voor het berekenen van Gromov-afstanden tussen eindige metrische ruimten.

We willen de waarnemingstheorie zoals deze geformuleerd wordt door de axioma's van Williamson veralgemenen. Laat X een verzameling van objecten zijn uit de buitenwereld. Verder veronderstellen we dat er een relatie bestaat van vergelijkende similariteit. Het basisidee is dat dit een relatie $\preceq$ moet zijn tussen paren van objecten, dus een relatie over $\binom{X}{2}$. Indien we onze intuïtie van vergelijkende similariteit wiskundig willen vertolken moet deze relatie voldoen aan twee eisen: deze relatie moet reflexief en transitief zijn. Zij $T(x, y, z, u) := \{x, y\} \preceq \{z, u\}$.

We gebruiken nu drie axioma's.

Axioma 1 drukt de reflexiviteit van $\preceq$ uit:

$$\forall xy \ [T(x, y, x, y)].$$

Axioma 2 drukt de transitiviteit van $\preceq$ uit:

$$\forall xyzuvw \ [T(x, y, z, u) \& T(z, u, v, w) \rightarrow T(x, y, v, w)].$$

Verder drukken we uit dat de volgorde in de paren geen rol speelt.

Axioma 3 $\forall xyzu \ [T(x, y, z, u) \leftrightarrow T(y, x, z, u) \leftrightarrow T(x, y, u, z)]$.

Het axioma T_1 van Williamson

$$\forall xyzu\ [T(x,y,z,u) \vee T(z,u,x,y)]$$

laten we weg. Het drukt uit dat elk twee paren objecten vergelijkbaar zijn. Welnu, het is best mogelijk dat twee paren objecten uit $\binom{X}{2}$ qua gelijkaardigheid gewoonweg niet te vergelijken zijn.

We laten vervolgens het verband zien tussen quasi-orde relaties en Alexandrov topologieën: als $(V, \preceq)$ een structuur is met quasi-orde relatie $\preceq$, $x \in V$ en $Q(x) := \{y \in V \mid y \preceq x\}$, dan is $\{Q(x) \mid x \in V\}$ de basis van een Alexandrov topologie (V, τ); omgekeerd, is (V, τ) een Alexandrov topologie en is $Q(x)$ de transfiniete doorsnede van alle open verzamelingen die x bevatten, dan is de relatie $x \preceq y := Q(x) \subseteq Q(y)$ een quasi-orde relatie.

Zij nu (X, d) een eindige quasi-metrische ruimte, de buitenwereld voorstellend, en zij $\{x,y\} \preceq \{u,v\} := d(x,y) \leq d(u,v)$. Dan is $\preceq$ een quasi-orde relatie op $\binom{X}{2}$. Elke niet volledig nauwkeurige waarneming van die buitenwereld bepaalt een verzameling $\left\{\{x,y\} \in \binom{X}{2} \mid d(x,y) < \epsilon_0\right\}$ voor zekere ϵ_0. We bewijzen dat de verzamelingen van deze vorm precies de open deelverzamelingen zijn van de corresponderende Alexandrov topologie (Stelling 34). Een niet volledig nauwkeurige waarneming van een eindig deel van de buitenwereld correspondeert dus met één enkele open deelverzameling van een Alexandrov topologie.

Ik heb met dit alles willen aantonen dat in de problematiek rond de vraag naar het verband tussen de wiskunde en de buitenwereld de similariteitsrelatie centraal staat.

Die similariteitsrelatie is echter geen perfekte isomorfie. Het is een quasi-isomorfie die bijvoorbeeld in termen van de Gromov-afstand gedefinieerd kan worden.

We kunnen daaruit twee conclusies trekken.

1. Het verband tussen de buitenwereld en het bewustzijn is geen isometrie. Het is een isometrie op ϵ na.

2. Ons wiskundig denken is enkel isometrisch met zichzelf. Vandaar dat de wiskunde het steeds heeft over ideeële objecten die niet in de buitenwereld voorkomen.

Ten slotte wil ik nog opmerken dat de Gromov-afstand vanuit zuiver wiskundig standpunt bijzonder interessant is. Michaël Gromov geeft nauwelijks aanwijzingen hoe in konkrete gevallen Gromov-afstanden kunnen uitgerekend worden. Het is een braakliggend stuk wiskunde dat rijk is aan interessante maar moeilijke problemen.

Het moge een voorbeeld zijn van hoe een filosofische vraagstelling bevruchtend kan zijn voor de vakwetenschappen, in concreto voor de wiskunde.

Bibliografie

[1] Cameron, P. J., *Oligomorphic Permutation Groups.* Cambridge University Press, 1990.

[2] Gonseth, F., *Les mathématiques et la réalité.* Paris, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, 1936.

[3] Goodman, N., 'Seven strictures on similarity.' In *Problems and Projects*, pp 437–446. Indianapolis, Bobbs Merrill, 1972.

[4] Gromov, M., *Structures métriques pour les variétés riemanniennes.* Paris, Cedic; Fernand Nathan, 1981.

[5] Hamming, R. W., 'The unreasonable effectiveness of mathematics.' *American Mathematical Monthly*, 87(1980)81–90.

[6] Hardy, G. H., *A Mathematician's Apology.* Cambridge University Press, 1969.

[7] Hendrickx, R., *De droom der vorsers.* Antwerpen, b + b, 1992.

[8] Hendrickx, R., 'The Gromov distance or isomorphy up to ϵ.' *Eureka* 52(1993) 15–22.

[9] Keisler, H. Jerome, 'Fundamentals of model theory.' In J. Barwise, editor, *Handbook of Mathemathical Logic.* Amsterdam, 1985, pp. 47–101.

[10] Kitcher, P., *The Nature of Mathematical Knowledge.* Oxford University Press, 1984.

[11] Kneebone, G. T., *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics*, chapter 13, pp 331–356. Van Nostrand, 1963.

[12] Machover, M., 'Towards a new philosophy of mathematics.' *The British Journal for the Philosophy of Science*, (1983)1–11.

[13] O'Connor, D. J., 'On resemblance.' *Meeting of the Aristotelian Society*, (1946)47–76.

[14] Paulin, F., 'Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels.' *Inventiones mathematicae*, 94(1988)53–80.

[15] Rado, R., 'Universal graphs and universal functions.' *Acta arithmetica*, 9(1964).

[16] Russell, B., *Our Knowledge of the External World as a Field for Scientific Method in Philosophy.* Chicago; London, Open Court Publications, 1914.

[17] Shapiro, S., 'Mathematics and reality.' *Philosophy of Science*, (1983)523–548.

[18] Van Bendeghem, J.-P., *Onderzoek naar de mogelijkheid van een empirische, eindige wiskunde en naar de implikaties ervan voor de relatie wiskunde-werkelijkheid, met bijzondere aandacht voor de getalnotie, de paradoxen van Zeno en de stelling van Gödel.* Doctoraat, Rijksuniversiteit Gent, 1983.

[19] Wigner, E. P., 'The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences.' *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13(1960)1–14.

[20] Williamson, T., 'First-order logics for comparative similarities.' *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 29(1988)457–481.

[21] Wittgenstein, L., *Tractatus logico-philosophicus.* Wien, 1918.

Abstract

This dissertation represents an attempt to understand the relationship between reality on the one, and the mathematics which tries to make sense of reality on the other hand.

A study of the relevant literature revealed that central in this field is the relation of similarity between reality and the mathematical model with which reality is described.

My starting point is a binary relation $\sim$ that is reflexive and symmetrical.

Next, we derive from this similarity relation another binary relation which we call $\sim'$. This too is in general reflexive and transitive.

Next, we axiomatize our theory and show its affinity with the theory of universally coloured graphs.

Then we posit a concrete $\sim$ relation: the Gromov distance between two metric spaces. This relation expresses the concept quasi-isometry. A number of concrete examples are then offered in which the Gromov-distances are calculated. In his work Michael Gromov himself hardly gives any clues on how in concrete cases Gromov-distances might be calculated. This is still an unexplored field in mathematics which is filled with interesting but difficult problems.

Next the relation is shown between quasi-order relations (which are reflexive and transitive) and the Alexandrov-topologies.

In the last chapter a theory of perception is sketched.

Curriculum vitae

Roger Hendrickx, geboren op 4 december 1940, studeerde eerst elektronica aan de Industriële Hogeschool Antwerpen-Mechelen waar hij in 1967 het diploma technisch ingenieur behaalde.

Daarna studeerde hij wiskunde aan de Katholieke Universiteit te Nijmegen. Deze studie werd in 1987 afgesloten met een doctoraal examen wiskunde. Tot zijn leermeesters behoorden J. H. de Boer, J. J. de Iongh, A. H. M. Levelt, A. C. M. Van Rooij, W. H. Schikhof, H. O. Singh Varma, P. Scheurer.

Van 1968 tot 1976 was hij verbonden aan de Europese Organisatie voor Ruimteonderzoek te Darmstadt en sinds 1978 is hij werkzaam bij het expertise kantoor Trans Technics Survey te Antwerpen.